

Megoldás. Legyen $\alpha = \arctg u$, $\beta = \arctg v$ és $\gamma = \arctg w$. Ekkor az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökei $\tg \alpha$, $\tg \beta$ és $\tg \gamma$, feladatunk pedig az $\alpha + \beta + \gamma$ összeg meghatározása. Az $x \rightarrow \arctg x$ függvény értékkészlete a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum, így $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Az addíciós tétel ismételt alkalmazásával:

$$\tg(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tg \alpha + \tg(\beta + \gamma)}{1 - \tg \alpha \cdot \tg(\beta + \gamma)}$$

és innen a $\tg(\beta + \gamma) = \frac{\tg \beta + \tg \gamma}{1 - \tg \beta \cdot \tg \gamma}$ helyettesítéssel rendezés után kapjuk, hogy

$$\tg(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta + \tg \gamma - \tg \alpha \cdot \tg \beta \cdot \tg \gamma}{1 - (\tg \alpha \cdot \tg \beta + \tg \beta \cdot \tg \gamma + \tg \gamma \cdot \tg \alpha)}.$$

Az adott egyenlet gyökeivel kifejezve tehát

$$(1) \quad \tg(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{u + v + w - uvw}{1 - (uv + vw + wu)}.$$

Az (1) jobb oldalán álló tört számlálójában és nevezőjében éppen az $x^3 - 10x + 11 = 0$ egyenlet gyökeinek elemi szimmetrikus polinomjai állnak, amelyek a Viète formulák szerint a polinom együtthatóival kifejezhetők:

$$(2) \quad u + v + w = 0, \quad uv + vw + wu = -10, \quad uvw = -11.$$

Innen $\tg(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{11}{1 + 10} = 1$, ezért $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol k adott egész szám, amelynek értékét még meg kell állapítanunk.

(2) szerint a gyökök szorzata negatív, így a negatív gyökök száma páratlan; a gyökök összege nulla, tehát nem lehet mindhárom gyök negatív: pontosan egy negatív és kettő pozitív gyök van. Így α , β és γ közül egy a $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, kettő pedig a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumba esik, így csak $k = 0$ lehetséges.

$$\text{Eredményeink szerint } \arctg u + \arctg v + \arctg w = \frac{\pi}{4}.$$

Megjegyzések. 1. Sok hiányos megoldás elégedett meg az $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi$ válasszal anélkül, hogy megadta volna k értékét.

2. Hasonlóan igazolható, hogy ha $\tg \alpha$, $\tg \beta$ és $\tg \gamma$ az $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinom gyökei, akkor $\tg(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{-a_1 + a_3}{1 - a_2}$, illetve teljes indukcióval könnyen bizonyítható (1) általánosításaként, hogy ha az n -edfokú $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ polinom gyökei $\tg \alpha_1, \tg \alpha_2, \dots, \tg \alpha_n$, akkor

$$\tg(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \frac{-a_1 + a_3 - a_5 + \dots}{1 - a_2 + a_4 - \dots} = \frac{\sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^i a_{2i-1}}{\sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^i a_{2i}}.$$