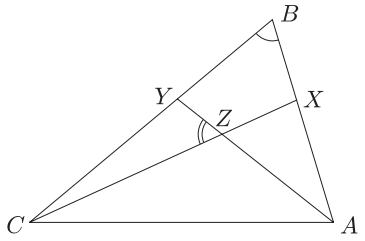
I. megoldás. Legyenek a háromszög szögei a szokásos jelölésekkel α, β, γ. A szinusz-tétel szerint

$$\frac{\sin ABY\sphericalangle}{\sin AYB\sphericalangle} = \frac{AY}{AB} = \frac{CY}{CZ} = \frac{\sin CZY\sphericalangle}{\sin CYZ\sphericalangle}.$$

Mivel $AYB\sphericalangle + CYZ\sphericalangle = 180^\circ$, azért a két szög szinusza egyenlő, tehát $\sin ABY\sphericalangle = \sin CZY\sphericalangle$. Mindkét szög 180°-nál kisebb, ezért két eset van.



1. ábra

1. $ABY\sphericalangle = CZY\sphericalangle$. Ekkor a $BXZY$ négyszög szemközti szögeinek összege:

$$ABY\sphericalangle + XZY\sphericalangle = ABY\sphericalangle + 180^\circ - CZY\sphericalangle = 180^\circ,$$

tehát $BXZY$ húrnégyszög, így csúcsai valóban egy körön vannak.

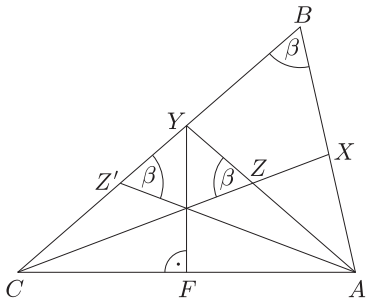
2. $ABY\sphericalangle = 180^\circ - CZY\sphericalangle$. Ekkor $ABY\sphericalangle = \beta$, így $AZC\sphericalangle = \beta$. De AYC egyenlő szárú háromszög, mert $AY = YC$, ezért $CAY\sphericalangle = \gamma$, és $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ miatt $ZCA\sphericalangle = \alpha$. Viszont X és Y belső pontok, ezért $\alpha = BAC\sphericalangle > YAC\sphericalangle = \gamma$ és $\gamma = BCA\sphericalangle > ZCA\sphericalangle = \alpha$. Az egyenlőtlenségek élesek, ezért ez az eset nem lehetséges. Más eset nincs, az állítást beláttuk.

Megjegyzés. Mivel a Z pont a háromszög belsejében van, $AZC\sphericalangle > AXC\sphericalangle > ABC\sphericalangle$, tehát a 2. eset nem fordulhat elő.

II. megoldás. Mivel $AY = YC$, azért az AYC háromszög egyenlő szárú, alapja AC; legyen AC felezőpontja F. Mivel AYC egyenlő szárú háromszög, azért YF a szimmetriatengelye. Tükrözzük YF-re az AYC háromszöget. Ekkor C képe A, Z képe Z' és $AZ' = CZ = AB$. Így a BAZ' háromszög is egyenlő szárú, ezért az alapon fekvő szögei egyenlők: $ABZ'\sphericalangle = AZ'B\sphericalangle = \beta$. A tükrözés miatt $YZ'A\sphericalangle = YZC\sphericalangle = \beta$, és így $YZX\sphericalangle = 180^\circ - \beta$. A $BXZY$ négyszög két szemközti szögének összege:

$$YBX\sphericalangle + YZX\sphericalangle = \beta + 180^\circ - \beta = 180^\circ,$$

így a $BXZY$ négyszög húrnégyszög, B, X, Y, Z valóban egy körön vannak.



2. ábra

Megjegyzés: A megoldásból látható, hogy a megadott feltételek csak akkor teljesülhetnek, ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge hegyesszög.