

A feladatra két megoldást mutatunk; mindkét megoldás felhasználja az $[x] + [y] \leq [x + y]$ egyenlőtlenséget, amely tetszőleges x, y valós számok esetén teljesül.

I. megoldás. Bebizonyítjuk a következő – a feladat állításánál általánosabb – tételt:

Ha az $a_1 \leq \dots \leq a_n$ valós számokra $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0$ és x tetszőleges valós szám, akkor

$$(2) \quad a_1[x] + a_2[2x] + \dots + a_n[nx] \geq 0.$$

Abban az esetben, amikor $a_1 = -1, a_2 = -\frac{1}{2}, \dots, a_{n-1} = -\frac{1}{n-1}$ és $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, a tétel éppen a feladat állítását adja.

A tételt teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ esetben a feltétel szerint $a_1 = 0$, és az $a_1[x] \geq 0$ egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tegyük most fel, hogy n valamely értékére az állítás igaz; ebből bebizonyítjuk az 1-gyel nagyobb értékre is. Legyenek tehát $a_1 \leq \dots \leq a_{n+1}$ olyan valós számok, amelyekre $a_1 + 2a_2 + \dots + (n+1)a_{n+1} = 0$ és x tetszőleges valós szám. Alakítsuk át (2) baloldalát a következőképpen:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i[ix] = \frac{a_{n+1}}{n} \sum_{i=1}^n ((n+1)x] - [ix] - [(n+1-i)x]) + \\ + \sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{2a_{n+1}}{n} \right) [ix].$$

A feltételekből következik, hogy a_{n+1} nemnegatív; ellenkező esetben ugyanis a rendezés miatt $a_1, \dots, a_{n+1}$ mindegyike negatív lenne, de akkor $a_1 + 2a_2 + \dots + (n+1)a_{n+1}$ nem lehetne 0. Az $[a] + [b] \leq [a + b]$ egyenlőtlenségből következik, hogy $[(n+1)x] - [ix] - [(n+1-i)x] \geq 0$; az összeg első fele tehát nemnegatív. Az összeg második feléről az indukciós feltevés felhasználásával igazoljuk ugyanezt. Legyen tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén $b_i = a_i + \frac{2a_{n+1}}{n}$. Ezekre a számokra teljesül, hogy $b_1 \leq \dots \leq b_n$, és

$$\sum_{i=1}^n ib_i = \sum_{i=1}^n i \left(a_i + \frac{2a_{n+1}}{n} \right) = \sum_{i=1}^n ia_i + \frac{2}{n}(1 + 2 + \dots + n)a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ia_i = 0.$$

Ezért, az indukciós feltevés alapján,

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{2a_{n+1}}{n} \right) [ix] = \sum_{i=1}^n b_i[ix] \geq 0.$$

A (3) azonosság jobb oldalán tehát csupa nemnegatív számot adtunk össze, ezzel igazoltuk, hogy $\sum_{i=1}^{n+1} a_i[ix] \geq 0$.

II. megoldás. Az $[x] + [y] \leq [x + y]$ egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy ha az $a_1, \dots, a_k$ pozitív egész számok összege n , akkor

$$(4) \quad [a_1x] + \dots + [a_kx] \leq [nx].$$

Jelöljük P_n -nel az olyan véges hosszúságú, pozitív egészekből álló számsorozatok halmazát, amelyekben az elemek összege n . A sorozatok hosszára nincs megkötés, P_n tartalmazza az egyetlen elemből álló (n) sorozatot éppen úgy, mint az n elemből álló $(1, 1, \dots, 1)$ -et. Például $P_3 = \{(1, 1, 1), (1, 2), (2, 1), (3)\}$.

A (4) egyenlőtlenséget P_n összes elemére felírhatjuk. A bizonyítandó (1)-et az így kapott egyenlőtlenségek lineáris kombinációjaként fogjuk előállítani.

Válasszuk ki P_n egy elemét a következőképpen: az első számot, a_1 -et véletlenszerűen választjuk az $1, \dots, n$ számok közül; ezután a második számot, a_2 -t véletlenszerűen választjuk az $1, 2, \dots, n - a_1$ számok közül és így tovább egészen addig, amíg el nem érjük az n összeget. Más szóval, az $(a_1, \dots, a_k)$ sorozat kiválasztásának valószínűsége

$$p(a_1, \dots, a_k) = \frac{1}{n \cdot (n - a_1) \cdot (n - a_1 - a_2) \cdot \dots \cdot (n - a_1 - \dots - a_{k-1})} = \\ = \frac{1}{(a_1 + \dots + a_k) \cdot (a_2 + \dots + a_n) \cdot \dots \cdot (a_{k-1} + a_k) \cdot a_k}.$$

Az összes sorozat valószínűségének összege természetesen 1. Minden egyes sorozatra szorozzuk meg a (4) egyenlőtlenséget $p(a_1, \dots, a_k)$ -val és az így kapott egyenlőtlenségeket adjuk össze. Azt állítjuk, hogy eredményül éppen a bizonyítandó (1)-et kapjuk.

Az egyenlőtlenségek összegének jobboldalán éppen $[nx]$ áll, mert a valószínűségek összege 1. Azt, hogy a baloldalon $\sum_{j=1}^n \frac{[jx]}{j}$ áll, teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ esetben ez az állítás triviális, mert csupán egyetlen 1-esből álló sorozat létezik és ezt 1 valószínűséggel választjuk ki. Legyen tehát $n > 1$ és tegyük fel, hogy kisebb értékekre az állításunk igaz. Csoportosítsuk P_n elemeit az első elem szerint szerint, különválasztva az egyetlen n -esből álló sorozatot, majd alkalmazzuk az indukciós feltevést:

$$\begin{aligned}
& \sum_{(a_1, \dots, a_k) \in P_n} p(a_1, \dots, a_k) ([a_1x] + \dots + [a_kx]) = \\
&= \sum_{a_1=1}^{n-1} \sum_{(a_2, \dots, a_k) \in P_{n-a_1}} \underbrace{\frac{[a_1x] + ([a_2x] + \dots + [a_kx])}{(a_1 + \dots + a_k) \cdot (a_2 + \dots + a_k) \cdot \dots \cdot a_k}}_n + \frac{[nx]}{n} = \\
&= \sum_{a_1=1}^{n-1} \frac{[a_1x]}{n} \sum_{(a_2, \dots, a_k) \in P_{n-a_1}} \frac{1}{(a_2 + \dots + a_k) \cdot \dots \cdot a_k} + \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{a_1=1}^{n-1} \sum_{(a_2, \dots, a_k) \in P_{n-a_1}} \frac{[a_2x] + \dots + [a_kx]}{(a_2 + \dots + a_k) \cdot \dots \cdot a_k} + \frac{[nx]}{n} = \\
&= \sum_{a_1=1}^{n-1} \frac{[a_1x]}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \sum_{a_1=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-a_1} \frac{[jx]}{j} + \frac{[nx]}{n} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{[jx]}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{a_1=1}^{n-j} \frac{[jx]}{j} + \frac{[nx]}{n} = \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{n-j}{nj} \right) [jx] + \frac{[nx]}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{[jx]}{j}.
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.