

**Megoldás.** A feltételek:  $p(0) = 0$ ,  $p(1) = 1$ ,  $p(-1) = 3$ ,

$$p(x) = 1 \cdot x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Helyettesítsük a polinomba az  $x = 0$  értéket: kapjuk, hogy  $a_n = 0$ .

Ha  $n = 1$ , akkor  $p(x) = x + 0$ . Erre a polinomra  $p(-1) \neq 3$ .

Ha  $n = 2$ , akkor  $p(x) = x^2 + a_1 x + 0$ . Helyettesítsük az  $x = 1$  értéket:  $p(1) = 1 + a_1 = 1$ , tehát  $a_1 = 0$ . A kapott polinom:  $p(x) = x^2$ , de  $p(-1) \neq 3$ .

Ha  $n = 3$ , akkor  $p(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + 0$ .

Helyettesítsük az  $x = 1$  értéket:  $p(1) = 1 + a_1 + a_2 = 1$ , tehát  $a_1 + a_2 = 0$ .

Helyettesítsük az  $x = -1$  értéket:  $p(-1) = -1 + a_1 - a_2 = 3$ , tehát  $a_1 - a_2 = 4$ . Innen:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -2$ .

A keresett polinom tehát  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$ , hiszen valamennyi feltételnek eleget tesz.