Megoldás. Használjuk a függvényre kirótt feltétellel ekvivalens

$$2f\left(\frac{x+y}{3}\right) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

alakot.

Helyettesítsünk y helyébe $2x$-et, ahol $x > 0$: $2f\left(\frac{x+2x}{3}\right) = f(x) + f(2x)$, ebből $f(x) = f(2x)$, és ez teljesül minden $x > 0$-ra. Ezért például

$$f(x) = f(2x) = f(4x). \tag{2}$$

Írjunk most az (1) összefüggésben x és y helyére is $3x$-et, $x > 0$-val:

$$2f(2x) = f(3x) + f(3x),$$

innen

$$f(2x) = f(3x). \tag{3}$$

(2)-ből és (3)-ból következik, hogy

$$f(x) = f(2x) = f(3x) = f(4x)$$

tetszőleges $x > 0$-ra.

Speciálisan $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy pozitív egész számokra minden függvényérték $f(1)$-gyel egyenlő.

Tegyük fel, hogy 1-től $(n-1)$-ig $(n-1 > 3)$ minden k számra igaz, hogy $f(k) = f(1)$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor $f(n) = f(1)$.

Ha $n = 3m + d$, ahol $d = 0$, 1 vagy 2, akkor az $x = 3m + d$, $y = 3 - d$ helyettesítéssel $x + y = 3m + 3$, tehát $2f(m+1) = f(3m+d) + f(3-d)$.

Mivel $3 - d = 3$, 2 vagy 1, így $f(3-d) = f(1)$, továbbá $0 < m + 1 < n$, hiszen $n = 3m + d$, ezért teljesül rá az indukciós feltétel, tehát $f(m+1) = f(1)$, ebből következik, hogy $2f(1) = f(3m+d) + f(1)$, azaz $f(n) = f(1)$.

Vizsgáljuk most a negatív egészeken felvett értékeket!

Legyen tetszőleges pozitív n esetén $x = -n$, $y = n + 3$. Ekkor $x + y = 3$, $f(n+3) = f(1)$ a korábbi teljes indukció alapján, így $2f(1) = f(-n) + f(1)$, vagyis $f(-n) = f(1)$.

Mindebből az következik, hogy f minden értelmezési tartománybeli helyen ugyanazt az értéket veszi fel.

Minden ilyen függvény eleget is tesz a feltételnek. Tegyük fel, hogy $f(x) = c$ minden nullától különböző x egész számra. Ekkor

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = c \qquad \text{és} \qquad \frac{f(x)+f(y)}{2} = c,$$

azaz a konstans függvény valóban meg is felel.