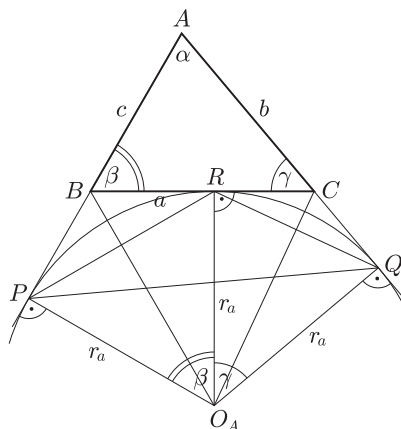


**Megoldás.** Jelöljük a háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon  $A, B, C$ , illetve  $\alpha, \beta, \gamma$ -val. Az  $a$  oldalhoz hozzáírt háromszög csúcsait jelöljük az *ábrán* látható módon  $P, Q, R$ -rel, a hozzáírt kör középpontját  $O_A$ -val, sugarát pedig  $r_a$ -val.



Az  $O_A R B P$  és  $O_A Q C R$  négyszögek húrnégyszögek, ugyanis  $P$ -nél és  $R$ -nél, illetve  $Q$ -nál és  $R$ -nél lévő szögek derékszögek, mert a hozzáírt kör érintői merőlegesek az érintési pontoz tartozó sugárra. Ezért  $\angle P O_A R = \angle A B C = \beta$  és  $\angle Q O_A R = \angle A C B = \gamma$ . Mivel  $\beta + \gamma < 180^\circ$ , azért  $O_A$  és  $R$  a  $PQ$  egyenes két különböző oldalán van. Tehát az  $a$  oldalhoz hozzáírt háromszög területe

$$T_{PQR} = T_{P O_A R} + T_{R O_A Q} - T_{P O_A Q}.$$

Felhasználva, hogy  $O_A P = O_A Q = O_A R = r_a$ , valamint, hogy  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ , kapjuk, hogy

$$T_{PQR} = \frac{r_a^2}{2} (\sin \beta + \sin \gamma - \sin (\beta + \gamma)) = \frac{r_a^2}{2} (\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha).$$

Hasonlóan írható fel a  $b$  oldalhoz hozzáírt háromszög területe ( $r_b$  a  $b$  oldalhoz hozzáírt kör sugara):  $\frac{r_b^2}{2} (\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta)$ .

Bevezetve a  $2s = a + b + c$  jelölést, valamint felhasználva a szinusz-tételt és a hozzáírt körök sugaraira vonatkozó  $r_a(s - a) = r_b(s - b)$  ( $= T_{ABC}$ ) összefüggést (ennek bizonyítása megtalálható pl. Kiss Gy.: *Amit jó tudni a háromszögekről*, KöMaL 2002/3, 130–139. old.), kapjuk, hogy a két hozzáírt háromszög területének aránya:

$$\frac{\frac{r_a^2}{2} (\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha)}{\frac{r_b^2}{2} (\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta)} = \frac{\frac{1}{(s-a)^2}}{\frac{1}{(s-b)^2}} \cdot \frac{s-a}{s-b} = \frac{s-b}{s-a}.$$