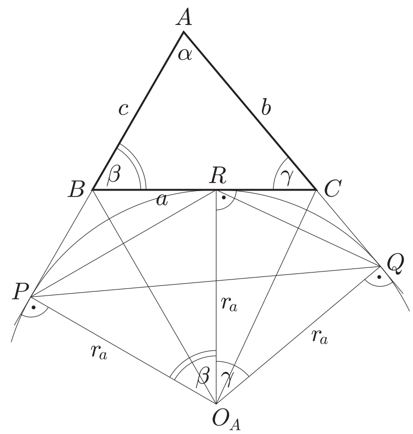
Megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon A, B, C, illetve α, β, γ-val. Az a oldalhoz hozzáírt háromszög csúcsait jelöljük az *ábrán* látható módon P, Q, R-rel, a hozzáírt kör középpontját O_A-val, sugarát pedig r_a-val.



Az O_ARBP és O_AQCR négyszögek húrnégyszögek, ugyanis P-nél és R-nél, illetve Q-nál és R-nél lévő szögeik derékszögek, mert a hozzáírt kör érintői merőlegesek az érintési pontoz tartozó sugárra. Ezért $PO_AR\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$ és $QO_AR\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \gamma$. Mivel $\beta + \gamma < 180^\circ$, azért O_A és R a PQ egyenes két különböző oldalán van. Tehát az a oldalhoz hozzáírt háromszög területe

$$T_{PQR} = T_{PO_AR} + T_{RO_AQ} - T_{PO_AQ}.$$

Felhasználva, hogy $O_AP = O_AQ = O_AR = r_a$, valamint, hogy $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, kapjuk, hogy

$$T_{PQR} = \frac{r_a^2}{2}\big(\sin\beta + \sin\gamma - \sin(\beta+\gamma)\big) = \frac{r_a^2}{2}(\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha).$$

Hasonlóan írható fel a b oldalhoz hozzáírt háromszög területe (r_b a b oldalhoz hozzáírt kör sugara): $\frac{r_b^2}{2}(\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta)$.

Bevezetve a $2s = a+b+c$ jelölést, valamint felhasználva a szinusztételt és a hozzáírt körök sugaraira vonatkozó $r_a(s-a) = r_b(s-b)$ $(= T_{ABC})$ összefüggést (ennek bizonyítása megtalálható pl. Kiss Gy.: *Amit jó tudni a háromszögekről,* KöMaL 2002/3, 130–139. old.), kapjuk, hogy a két hozzáírt háromszög területének aránya:

$$\frac{\frac{r_a^2}{2}(\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha)}{\frac{r_b^2}{2}(\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta)} = \frac{\frac{1}{(s-a)^2}}{\frac{1}{(s-b)^2}} \cdot \frac{s-a}{s-b} = \frac{s-b}{s-a}.$$