

Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origója A legyen, B koordinátái pedig legyenek $(1; 0)$. Ekkor $C(c; 0)$, ahol $c < 0$ rögzített, e egyenlete $X = c$, D koordinátái pedig $(c; d)$, ahol d tetszőleges.

Ezek után P koordinátáit egyszerűen meghatározhatjuk. A BD egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{BD} = (c - 1; d)$, tehát egyenlete

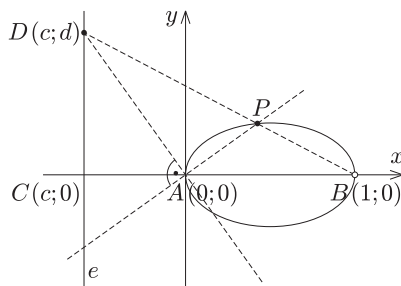
$$(1) \quad dX - (c - 1)Y = d.$$

Az AP egyenes egy normálvektora $\overrightarrow{AD} = (c; d)$, tehát egyenlete

$$(2) \quad cX + dY = 0.$$

A két egyenes metszéspontja, azaz P koordinátái:

$$P \left(\frac{d^2}{c^2 + d^2 - c}; \frac{cd}{c - c^2 - d^2} \right).$$



A keresett mértani hely egyenletét a d paraméter kiküszöbölésével kaphatjuk meg. Az (1) egyenletből következik, hogy P koordinátái kielégítik a

$$dXY - (c - 1)Y^2 = dY$$

egyenletet is, vagyis a (2)-ből következő $dY = -cX$ összefüggést felhasználva a

$$-cX^2 - (c - 1)Y^2 = -cX$$

egyenletet is. Ezt rendezve

$$(3) \quad \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{c - 1}{c} Y^2 = \frac{1}{4}$$

adódik, ami $c < 0$ miatt egy $\mathcal{E}$ ellipszis egyenlete. A P pontok tehát mind rajta vannak az $\mathcal{E}$ ellipszisen, melynek középpontja AB felezőpontja, nagytengelye AB , kistengelyének hossza pedig $\sqrt{\frac{c}{c - 1}}$.

Mivel $c^2 - c > 0$, azért minden $0 \leq k < 1$ esetén az $k = \frac{d^2}{c^2 + d^2 - c}$ egyenletnek létezik d -ben megoldása,

$$d = \pm \sqrt{\frac{k(c^2 - c)}{1 - k}},$$

$k = 1$ esetén viszont nincs megfelelő d érték. Vagyis $\mathcal{E}$ minden olyan pontja előáll a két egyenes metszéspontjaként, melynek első koordinátája 1-nél kisebb.

Tehát a keresett mértani hely az $\mathcal{E}$ ellipszis, kivéve a B pontot.

Strenner Balázs (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Több megoldó úgy értelmezte a feladatot, hogy a C pont is változhat. Mivel a feladat szövegéből nem derült ki egyértelműen, hogy C rögzített pont, ezért ők is megkapták a teljes pontszámot, ha helyesen adták meg az ennek a feltételnek eleget tevő mértani helyet, ami az AB átmérőjű nyílt körlap és az A pont. Ez megoldásunkból egyszerűen következik: Ha C változik, akkor a mértani helyként kapott $\mathcal{E}$ ellipszis kistengelye változik. Mint láttuk, ennek hossza $\sqrt{\frac{c}{c - 1}}$, ami minden 0 és 1 közti értéket felvehet, ha c tetszőleges negatív szám lehet. Ekkor tehát a mértani hely az összes ilyen ellipszisek uniója (kivéve B -t).