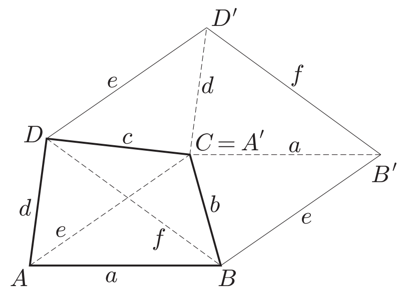


1. ábra

I. megoldás. Toljuk el az ABD háromszöget az $\overrightarrow{AC}$ vektorral. (*1. ábra*) Így az $A'B'D'$ háromszöget kapjuk, ahol $A'=C$. Az ábra betűzése szerint azt kell igazolnunk, hogy

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \geq (e+f)^2.$$

A $DBB'D'$ paralelogramma oldalai az eredeti négyszög átlói, e és f. Két pontot összekötő töröttvonal hossza legalább akkora, mint a két pontot összekötő szakaszé, ezért $a+c \geq B'D$ és $b+d \geq BD'$. A kapott egyenlőtlenségek négyzetét összeadva

$$(a+c)^2+(b+d)^2 \geq DB'^2+BD'^2.$$

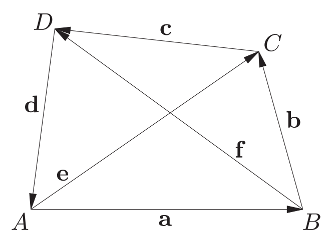
Ismeretes, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. A $DBB'D'$ paralelogrammában tehát

$$DB'^2+BD'^2=2e^2+2f^2,$$

és így $(a+c)^2+(b+d)^2 \geq 2(e^2+f^2)=(e-f)^2+(e+f)^2$. Mivel $(e-f)^2 \geq 0$, innen a bizonyítandó állítást kapjuk.

A bizonyításból kiderül, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha a DCB' és a $D'CB$ háromszögek elfajulnak, az $ABCD$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, másrészt $(e-f)^2=0$, a négyszög átlói egyenlők. Mindkét feltétel pedig akkor és csak akkor teljesül, ha az $ABCD$ négyszög téglalap.

Jelitai Kálmán (Budapest, Szent István Gimn., 12. évf.) és
Fehér Gábor (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.) dolgozata nyomán



2. ábra

II. megoldás. Irányítsuk a konvex négyszög oldalait és átlóit a *2. ábra* szerint. Így $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$, továbbá $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{e}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{f}$, $\mathbf{c}+\mathbf{d}=-\mathbf{e}$, $\mathbf{d}+\mathbf{a}=-\mathbf{f}$. Emeljük négyzetre az utóbbi négy egyenlőséget, majd adjuk össze az így adódó összefüggéseket. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{cd}+\mathbf{da}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon a skalárszorzatok összege szorzattá alakítható: $\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{cd}+\mathbf{da}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}+\mathbf{d})$. Ezt felhasználva

$$\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2+(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}+\mathbf{d}). \tag{1}$$

Az oldalak irányítása szerint $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$. Ha az (1) összefüggésben $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ helyére $-(\mathbf{b}+\mathbf{d})$-t, illetve $(\mathbf{b}+\mathbf{d})$ helyére $-(\mathbf{a}+\mathbf{c})$-t írunk, akkor a műveletek elvégzése után

$$\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2-(\mathbf{b}+\mathbf{d})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{bd}, \tag{2}$$

továbbá

$$\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2-(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{d}^2-2\mathbf{ac} \tag{3}$$

adódik.

Adjuk össze a (2) és (3) egyenlőségeket:

$$2(\mathbf{e}^2+\mathbf{f}^2)=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+\mathbf{d}^2-2\mathbf{ac}-2\mathbf{bd}.$$

Egy vektor négyzete a vektor hosszának a négyzete. Így a fenti összefüggés átírható:

$$2(e^2+f^2)=a^2+b^2+c^2+d^2-2\mathbf{ac}-2\mathbf{bd}. \tag{4}$$

A jobb oldalon $a^2+c^2-2\mathbf{ac}=a^2+c^2-2ac\cos\varphi$, ahol φ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok hajlásszöge. Mivel a és c nem negatív, továbbá $-1\le\cos\varphi\le 1$, azért

$$a^2+c^2-2ac\cos\varphi\le a^2+c^2+2ac=(a+c)^2$$

és pontosan akkor van egyenlőség, ha $\cos\varphi=-1$, $\varphi=180^\circ$, az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok párhuzamosak.

Ugyanígy kapjuk, hogy $b^2+d^2-2\mathbf{bd}\le(b+d)^2$. Az első megoldásban látottak szerint $(e+f)^2\le 2(e^2+f^2)$. Így (4)-ből a talált egyenlőtlenségek felhasználásával következik, hogy $(e+f)^2\le(a+c)^2+(b+d)^2$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Pálinkás Csaba (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. évf.)

Megjegyzések 1. A második megoldásból is nyomban adódik, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha az $ABCD$ négyszög téglalap. Vegyük észre továbbá, hogy egyik esetben sem használtuk ki, hogy a négyszög konvex: a feladat állítása tetszőleges négyszögre igaz.

2. Több dolgozat két ismertebb tételre vezette vissza a feladatot. Az első megoldásban is felhasznált paralelogrammatétel általánosítása azt mondja ki, hogy az $ABCD$ négyszögben az oldalak négyzetösszege nagyobb vagy egyenlő, mint az átlók négyzetösszege:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\ge AC^2+BD^2 \tag{5}$$

és paralelogrammában van egyenlőség. (*Geometriai feladatok gyűjteménye,* **I. 1678.** feladat.)

A *Ptolemaiosz*-tétel általánosítása szerint az $ABCD$ négyszögben

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\ge AC\cdot BD \tag{6}$$

és húrnégyszögben van egyenlőség. (A bizonyítás megtalálható Reiman István: *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994* c. művének 542. oldalán.)

A bizonyítandó állítás most már egyszerűen adódik, ha (6) kétszeresét hozzáadjuk (5)-höz és az egyenlőség feltétele is leolvasható.