Megoldás. Az állítást két részben bizonyítjuk. Először megmutatjuk, hogy ha $abcd = 1$, akkor $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a + b + c + d$.

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} = 1,$$

ahol egyenlőség csak az $a = b = c = d$ esetben áll fenn, amikor is $abcd = 1$ miatt mind a négy szám 1-gyel egyenlő. A számtani közép és a harmadik hatványközép közötti egyenlőtlenséget is figyelembe véve innen

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}.$$

Ennek alapján $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a + b + c + d$, ahol egyenlőség pontosan az $a = b = c = d = 1$ esetben áll fenn.

Másodjára azt látjuk be, hogy ha $abcd = 1$, akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

Ugyancsak a fent említett közepek között fennálló egyenlőtlenségek miatt

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} + \frac{a^3+b^3+d^3}{3} + \frac{a^3+c^3+d^3}{3} + \frac{b^3+c^3+d^3}{3} \geq \\ \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 + \left(\frac{a+b+d}{3}\right)^3 + \left(\frac{a+c+d}{3}\right)^3 + \left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3 \geq \\ \geq abc + abd + acd + bcd. \end{aligned}$$

Azonban $abcd = 1$ miatt $abc + abd + acd + bcd = \frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$, Ezzel a második egyenlőtlenséget is beláttuk. Az egyenlőség szükséges és elégséges feltétele ismét $a = b = c = d = 1$.

A kapott két eredményt összevetve kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget, melyben egyenlőség pontosan az $a = b = c = d = 1$ esetben áll fenn.