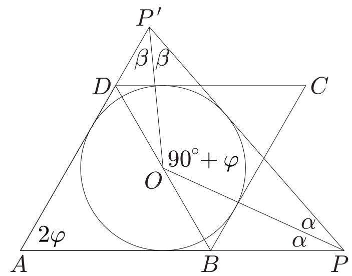
Megoldás. Először belátunk egy lemmát, amiből feladatunk megoldása már egyszerűen következik.

Lemma. *Ha az $ABCD$ rombusz AB oldalának B-n túli meghosszabbításán lévő P pontból a rombusz beírt köréhez húzott érintő az AD egyenest a P' pontban metszi, a rombusz beírt körének középpontja pedig O, akkor*

$$P'D : DO = OB : BP.$$



Jelöljük az APP' háromszög szögeit az *ábrán* látható módon 2φ, 2α, 2β-val. Mivel a rombusz beírt köre egyúttal az APP' háromszög beírt köre is, azért O a háromszög szögfelezőinek metszéspontja. Tehát $DP'O\sphericalangle = OP'P\sphericalangle = \beta$ és $BPO\sphericalangle = OPP'\sphericalangle = \alpha$. Az OPP' háromszög harmadik szöge tehát

$$POP'\sphericalangle = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 90^\circ + \varphi.$$

Mivel $ABCD$ rombusz, a BCD háromszög egyenlő szárú és C-nél lévő szöge 2φ. Ezért $CBD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = \dfrac{180^\circ - 2\varphi}{2} = 90^\circ - \varphi$. A rombusz szemközti oldalai párhuzamosak, ezért $P'DC\sphericalangle = CBP\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 2\varphi$, így kapjuk, hogy

$$P'DO\sphericalangle = P'DC\sphericalangle + CDB\sphericalangle = 2\varphi + (90^\circ - \varphi) = 90^\circ + \varphi = P'OP\sphericalangle$$

és

$$OBP\sphericalangle = DBC\sphericalangle + CBP\sphericalangle = (90^\circ - \varphi) + 2\varphi = 90^\circ + \varphi = P'OP\sphericalangle.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a $P'DO$ és az OBP háromszög is hasonló a $P'OP$ háromszöghöz, mert két-két megfelelő szögük megegyezik. Ekkor viszont a két háromszög egymáshoz is hasonló, tehát megfelelő oldalaik aránya megegyezik, amiből következik a bizonyítandó $P'D : DO = OB : BP$ állítás. $\square$

Visszatérve eredeti feladatunkra: A lemma állítását az E és F pontokra alkalmazva kapjuk, hogy $E'D : DO = OB : BE$ és $F'D : DO = OB : BF$. A két egyenlőséget elosztva egymással adódik a keresett arány: $E'D : F'D = BF : BE = \mu : \lambda$.

Sándor Nóra Katalin (Pápai Ref. Koll. Gimn., 12. évf.) dolgozatát felhasználva