

Legyen a folyó szélessége D , a víz sebessége v , és jelölje u azt a sebességet, amivel Joe futni, illetve evezni tud. Tegyük fel, hogy Joe először átevez a folyón, majd a partot érés helyétől a part mentén gyalog megy az aranyröghöz. (Természetesen az evezés és a gyaloglás sorrendje felcserélhető.) Ha csónakja vízhez viszonyított sebessége a vízével $\pi/2 + \alpha$ szöget zár be, a folyóra merőlegesen $u \cos \alpha$ sebességgel halad, miközben $v - u \sin \alpha$ sebességgel csurog lefelé (1. ábra). Ennek megfelelően

$$t_1 = \frac{D}{u \cos \alpha}$$

idő alatt ér át a túlsó partra, és

$$s = (v - u \sin \alpha)t_1$$

távolsággal az aranyrög alatt ér partot. Ezt az utat

$$t_2 = \frac{s}{u} = D \frac{v - u \sin \alpha}{u^2 \cos \alpha}$$

idő alatt teszi meg. Így az aranyrög elérése az α szög függvényében összesen

$$t(\alpha) = t_1 + t_2 = \frac{D}{u} \cdot \frac{v/u + 1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

időt vesz igénybe. Ha α -t egy kicsi $\Delta\alpha$ értékkel megváltoztatjuk, t is megváltozik, értéke

$$t(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{D}{u} \cdot \frac{v/u + 1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{D}{u} \cdot \frac{(v/u + 1) \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \Delta\alpha$$

lesz. A levezetés során kihasználtuk, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ esetén

$$\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha \quad \text{és} \quad \cos \Delta\alpha \approx 1,$$

így

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \sin \alpha + \Delta\alpha \cos \alpha,$$

illetve

$$\cos(\alpha + \Delta\alpha) \approx \cos \alpha - \Delta\alpha \sin \alpha,$$

továbbá azt, hogy

$$(1 - \Delta\alpha \operatorname{tg} \alpha)^{-1} \approx (1 + \Delta\alpha \operatorname{tg} \alpha),$$

a $(\Delta\alpha)^2$ nagyságrendű tagokat pedig elhanyagoltuk. (Ezek a közelítések annál jobbak, minél kisebb $\Delta\alpha$.) Ha $t(\alpha)$ minimális, akkor t értéke sem pozitív, sem negatív $\Delta\alpha$ mellett nem csökkenhet, következésképpen $\Delta\alpha$ együtthatója nulla kell legyen:

$$\frac{(v/u + 1) \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = 0, \quad \text{innen} \quad \sin \alpha = \frac{u}{v + u}.$$

Eddigi számításunk csak akkor helyes, ha $v - u \sin \alpha \geq 0$. Ellenkező esetben s negatív lenne, azaz Joe az aranyrög „fölkött” érne partot. Ilyenkor $t_2 = -s/u$ -val kellene számolnunk, de ezt az esetet nem érdemes végigszámolni, mert nyilván idővesztés, ha Joe „túlevez” az aranyrögön. Ekkor (tehát ha $v \leq u \sin \alpha$) Joenak úgy érdemes eveznie, hogy az eredő sebessége merőleges legyen a folyó partvonalára. A két esetet elválasztó határesetben

$$v - u \frac{u}{v + u} = 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{v}{u} = \frac{u}{v + u},$$

ahonnan

$$\frac{v}{u} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618.$$

Ez éppen az *aranymetszés* nevezetes arányszáma.

A fenti eredményt a differenciálszámítás formális szabályainak alkalmazásával vagy az

$$f(\alpha) = \frac{|R - \sin \alpha| + 1}{\cos \alpha}$$

függvény ($R = v/u$) grafikus vizsgálatával is megkaphatjuk (2. ábra).

W. F.

Megjegyzés. A megoldás során természetesnek vettük, hogy Joe a vízben egyenes vonalban evez, és a szárazföldön is egyenes vonalban gyalogol. Ez utóbbi – a legrövidebb idejű mozgásnál – nyilván igaz (hiszen „két pont között legrövidebb út az egyenes”), az előbbi célszerűségét pedig a vízhez rögzített koordináta-rendszerben lehet a legkönnyebben belátni.

