

I. megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait és szögeit a szokásos módon A, B, C , illetve α, β, γ -val, a beírt kör érintési pontjait A_1, B_1, C_1 -gyel, középpontját pedig O -val (lásd az *ábrát*). Egy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza egyenlő, ezért az AB_1C_1 háromszög egyenlő szárú. Az alapon fekvő szögek egyenlők, tehát

$$\begin{aligned} AB_1C_1 \sphericalangle &= AC_1B_1 \sphericalangle = \\ &= \frac{180^\circ - B_1AC_1 \sphericalangle}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Vagyis $AB_1C_1 \sphericalangle$ hegyesszög. Ez a szög a beírt kör rövidebbik B_1C_1 ívéhez tartozó érintőszárú kerületi szög, tehát megegyezik az ugyanehhez az ívhez tartozó közönséges kerületi szöggel, a $B_1A_1C_1 \sphericalangle$ -gel. Ezért ez utóbbi is hegyesszög.

Ugyanígy látható be, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög másik két szöge is hegyesszög, vagyis a beírt körnek az oldalakon lévő érintési pontjai mindig hegyesszögű háromszöget alkotnak.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Mivel $OB_1 \perp AC$ és $OC_1 \perp AB$, azért a B_1C_1 egyenes elválasztja az A és az O pontokat. De B_1C_1 nyilván elválasztja az A és az A_1 pontokat is, ezért O és A_1 a B_1C_1 egyenesnek ugyanarra az oldalára esik. Vagyis O benne van abban a B_1C_1 egyenes által meghatározott félsíkban, amelyikben az $A_1B_1C_1$ háromszög is elhelyezkedik. Ez nyilván igaz az A_1B_1 és az A_1C_1 egyenesek által meghatározott félsíkokra is. Tehát O benne van a három félsík metszetében, azaz O az $A_1B_1C_1$ háromszög belső pontja.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt kör éppen az ABC háromszög beírt köre. Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög tartalmazza a köré írt kör középpontját. Ez viszont azt jelenti, hogy a háromszög hegyesszögű. Vagyis egy háromszög beírt körének az oldalakon lévő érintési pontjai nem alkothatnak tompaszögű háromszöget.

