

I. megoldás. A ládát toló F erő iránya az ábrának megfelelően β szöget zár be a lejtővel. Jelölje azt az erőt amivel a láda a lejtőt nyomja N , a súrlódási erőt S , a súrlódási határszöget pedig α_0 (ahol $\tan \alpha_0 = \mu$)! Az erők egyensúlya miatt

$$F \cos \beta = mg \sin \alpha + S, N = mg \cos \alpha - F \sin \beta, S = \mu N.$$

Innen

$$F = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = mg \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}.$$

Ez nyilván akkor a legkisebb, ha $\beta = \alpha_0$. Ekkor

$$F = mg \sin(\alpha + \alpha_0) = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Megoldásunk akkor helyes, ha F még nem függőleges, és a ládát nem emeljük el a lejtőtől (N pozitív). Érdekes módon a két feltétel konkrétan megfogalmazva ugyanarra az egyenlőtlenségre vezet: $\cos(\alpha + \alpha_0) > 0$. Ha ez nem teljesül, a legkönnyebb a ládát a lejtő elhagyásával egyszerűen felemelni.

II. megoldás. A test csúszik, tehát a talaj $\mathbf{N}$ nyomóerejének és az $\mathbf{S}$ súrlódási erőnek az eredője rajta fekszik a súrlódási határszög által kijelölt (vagyis a test pillanatnyi helyzetét megadó T ponton átmenő, a lejtő normálisával „balra” α_0 szöget bezáró) e egyenesen. Ennek az erőnek és a kérdéses $\mathbf{F}$ erőnek vektori összege $-\mathbf{mg}$ -t kell adjon, hiszen $\mathbf{N} + \mathbf{S} + \mathbf{F} + \mathbf{mg} = 0$.

Az $\mathbf{F}$ erőt úgy szerkeszthetjük meg, hogy a $-\mathbf{mg}$ vektor P végpontját összekötjük az e egyenes valamely Q pontjával. Az erő F nagysága akkor a legkisebb, ha PQ minimális, vagyis amikor PQ merőleges TQ -ra. Az ábráról leolvasható, hogy PQ optimális esetben a vízszintessel $\alpha + \alpha_0$ szöget zár be, a minimális nagyságú erő és a lejtő síkjának szöge tehát $\beta = \alpha_0$. A minimális erő nagysága

$$F = mg \sin(\alpha + \alpha_0) = mg(\sin \alpha \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha) = mg \cos \alpha_0 (\sin \alpha + \cos \alpha \tan \alpha_0) = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Mindez csak akkor igaz, ha Q a T ponttól „balra” helyezkedik el, vagyis amíg $\alpha + \alpha_0 < \pi/2$. Ellenkező esetben F legkisebb értéke mg , iránya pedig függőlegesen felfelé mutat.

