

Mivel $m_1 = m_3$, a rendszer az *1. ábrán* látható koordináta-rendszer y tengelyére nézve szimmetrikus mozgást végez. A korongokra vízszintes irányú külső erő nem hat (a függőleges irányú erők eredője pedig nulla), így a három test összimpulzusa nem változhat meg. Kezdetben az y irányú impulzus $m_2 v_0$ volt, a középső korong megállásának pillanatában pedig $(m_1 + m_3)v_y$. A lendületmegmaradás törvénye szerint

$$v_y = \frac{m_2}{m_1 + m_3} v_0 = \frac{m_2}{2m_1} v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1. ábra

A légpárnás asztalon a súrlódás elhanyagolható, az ütközések pedig rugalmasak, a rendszer E mechanikai energiája tehát időben állandó. Kezdetben

$$E = \frac{1}{2}m_2v_0^2,$$

a középső korong megállásának pillanatában pedig

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_3)(v_x^2 + v_y^2).$$

Az energiamegmaradás törvényének értelmében

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_3)(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m_2v_0^2,$$

ahonnan v_y korábban kiszámított értékének felhasználásával

$$v_x^2 = \frac{m_2}{2m_1} \left(1 - \frac{m_2}{2m_1}\right) v_0^2,$$

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{m_2}{2m_1} \left(1 - \frac{m_2}{2m_1}\right)} v_0$$

adódik. Látható, hogy a középső korong csak $m_2 \leq 2m_1$ esetén állhat meg (a feladat számadataival ez valóban teljesül). A v_x sebességkomponens kétféle előjele arra utal, hogy az m_2 tömegű korong megállhat olyan helyzetben is, amelynél a szélső korongok közelednek egymáshoz, de úgy is, hogy a másik két korong távolodik egymástól. Az első rugalmas ütközés után nyilván a távolodásnak megfelelő pozitív előjelű megoldás érvényes.

A jobb szélső korong sebessége tehát a középső korong első megállásakor a

$$v_x = \sqrt{\frac{m_2}{2m_1} \left(1 - \frac{m_2}{2m_1}\right)} v_0 = \sqrt{8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \text{illetve} \quad v_y = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

komponensekkel adható meg. A szélső korongok sebességének nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{24} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a sebességvektor irányának az x tengellyel bezárt szöge pedig

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \approx 54,7^\circ.$$

A középső korong megállásának pillanatában a szélső korongok sebessége merőleges kell legyen a nekik megfelelő fonálra (hiszen a fonál irányú relatív sebességük a fonalak nyújthatatlansága miatt nulla), így a fonalak egymással $2\alpha \approx 109^\circ$ -os szöget zárnak be.

Balogh László (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) és
Rakya Péter (Révkomárom, Selye J. Gimn., 10. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A feladat numerikus adatai (a közölt számjegyek száma alapján) semmiképpen nem tekinthetők nagyon pontos (mondjuk százalékosnál pontosabb) értékeknek. Emiatt nincs értelme a belőlük kiszámított mennyiségeket pl. $v = 4,89897 \text{ m/s}$, illetve $2\alpha = 109,471^\circ$ módon, vagy esetleg még ennél is „értékes” jegyre megadni!

2. A megoldás során feltételeztük, hogy a fonalak mindvégig feszesek. Be lehet látni, hogy ez valóban így van, a fonalat feszítő erők sehol nem válnak nullává, hanem egy bizonyos $F_{\min}$ érték alá sosem csökkennek.

2. ábra

3. Tanulságos a mozgás leírása a (X és Y tengelyekkel megadott) tömegközépponti koordináta-rendszerben. A rendszer S tömegközéppontja

$$v_{TKP} = \frac{m_2}{2m_1 + m_2} v_0$$

sebességgel mozog az asztalhoz képest a negatív Y tengely irányában. Az S ponthoz rögzített rendszerből nézve a szélső korongok

az indításkor

$$V_Y^{(1,3)} = \frac{m_2}{m_2 + 2m_1} v_0$$

sebességgel mozognak Y irányban, a középső korong sebessége pedig

$$V_Y^{(2)} = v_{TKP} - v_0 = -\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1} v_0$$

az Y tengely irányában, tehát ténylegesen $-Y$ irányú (2. ábra). A három korong összenergiája a tömegközépponti rendszerben

$$\begin{aligned} E_{TKP} &= \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{2m_1}{2m_1 + m_2} v_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{2m_1 + m_2} v_0 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} v_0^2. \end{aligned}$$

Ez az érték kisebb, mint a légpárnás asztalhoz rögzített koordináta-rendszerben mérhető E összenergia.

A tömegközéppont a mozgás során mindvégig az origóban marad. Ha a középső korong az $-Y$ tengely mentén d távolságnyt elmozdul, akkor a másik két test Y irányú elmozdulása $Y = \frac{m_2}{2m_1} \cdot d$. Másrészt viszont a középső és a szélső korongok távolsága mindig L , fennáll tehát

$$X^2 + (Y + d)^2 = L^2, \quad \text{azaz} \quad X^2 + Y^2 \left(1 + \frac{2m_1}{m_2} \right)^2 = L^2.$$

Ez az egyenlet

$$\left(\frac{X}{a} \right)^2 + \left(\frac{Y}{b} \right)^2 = 1$$

alakú, vagyis egy

$$a = L \quad \text{és} \quad b = m_2 L / (m_2 + 2m_1)$$

féltengelyekkel rendelkező ellipszis egyenlete (3. ábra). A két szélső korong az ellipszis mentén mozog, míg a középső az Y tengely mentén rezeg $2m_1 L / (m_2 + 2m_1)$ amplitúdóval.

3. ábra

A két szélső test (az ütközéseknek megfelelő $X = 0$ koordinátájú pontok kis környezetének kivételével) befutja a teljes ellipszist. Sehol sem állhatnak meg, hiszen ha ezt tennék, akkor a középső testnek is meg kellene állnia, és ilyenkor nem lehetne a rendszer összenergiája a kiszámított $E_{TKP} \neq 0$ érték.

(G. P.)