

3.A feladat. Neutrínótömeg és neutronbomlás

a) Jelöljük az egyes részecskék (relativisztikus) energiáját E -vel, impulzusvektorát pedig $\mathbf{q}$ -val, és mindegyiket lássuk el a részecske típusára utaló (p, n, e, illetve az antineutrínót ν) indexszel! Használjunk olyan egységrendszert, amelyben a fénysebesség egységnyi (ebben a tömeget, az energiát és az impulzust egyaránt MeV-ban mérhetjük.)

A bomlási folyamat során az energiák összege és az impulzusok összege változatlan marad (ezek megmaradó mennyiségek):

$$(1) \quad E_n = E_p + E_e + E_\nu,$$

$$(2) \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_\nu.$$

Az egyes részecskék energiája és impulzusa összefügg egymással:

$$(3) \quad E_i^2 - \mathbf{q}_i^2 = m_i^2 \quad (i = n, p, e, \nu),$$

amint az a megfelelő $\mathbf{v}_i$ sebességgel felírt

$$E_i = \frac{m_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad \mathbf{q}_i = \frac{m_i \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2}}$$

formulákból könnyen leolvasható.

Képzeld el, hogy a vizsgálandó $n \rightarrow p + e + \nu$ bomlási folyamat két lépésben megy végbe: a neutron először elbomlik egy elektronra és egy x jelű részecskére, majd az x részecske elbomlik protonra és antineutrínóra:

$$n \rightarrow e + x \quad \text{majd} \quad x \rightarrow p + \nu.$$

(A megmaradási törvények szempontjából lényegtelen, hogy a folyamat ténylegesen így zajlik-e le, vagy pedig egyszerre, egyetlen pillanatban történik a neutron bomlása; a feladatban szereplő kérdésre azonban könnyebb választ adni, ha lépcsőzetesnek gondoljuk a bomlást.)

Írjuk fel a bomlás első részére a megmaradási törvényeket abban a koordináta-rendszerben, amelyben a neutron áll (azaz ahol $\mathbf{q}_n = 0$ és $E_n = m_n$). Az impulzusmegmaradás törvénye miatt az elektron és az x részecske impulzusa ugyanakkora nagyságú (de ellentétes irányú), az energiamegmaradást tehát így fogalmazhatjuk meg:

$$(4) \quad m_n = E_e + E_x,$$

ahol

$$(6) \quad E_e^2 - m_e^2 (= q_e^2 = q_x^2) = E_x^2 - m_x^2.$$

Fejezzük ki (5)-ből E_x -t és helyettesítsük be (6)-ba, majd a kapott összefüggésből határozzuk meg az elektron energiáját. Az eredmény:

$$(7) \quad E_e^2 = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_x^2}{2m_n^2}.$$

Látható, hogy a bomlás során keletkező elektronnak annál nagyobb lesz az energiája, minél kisebb a bomlás másik termékének (az x részecskének) a tömege.

Mekkora lehet m_x legkisebb értéke? Erre a kérdésre legkönnyebben az x részecske nyugalmi rendszerében kaphatjuk meg a választ. Mivel x egy protonra és egy antineutrínóra bomlik, fennáll, hogy

$$(8) \quad m_x = E'_p + E'_\nu \geq m_p + m_\nu = m_x^{\min}.$$

(A vessző arra utal, hogy ezeket a mennyiségeket nem a laboratóriumi koordináta-rendszerben számítottuk ki, hanem az x részecske nyugalmi rendszerében.

A (8) egyenlőtlenség akkor válik egyenlőséggé, amikor a proton és az antineutrínó egymáshoz képest nem mozog, tehát a laboratóriumi rendszerből nézve a sebességek megegyezik. Ebben a határesetben (7) alapján

$$E_e^{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_x^{\min})^2}{2m_n^2} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2}{2m_n^2},$$

amelynek numerikus értéke $1,292\,569 \text{ MeV} \approx 1,29 \text{ MeV}$.

Az antineutrínó (és vele egyezően a proton) sebessége az x részecske (labor rendszerbeli) sebességével egyezik meg, ami így adható meg:

$$v_m = \frac{\sqrt{(m_n + m_e + m_x)(m_n + m_e + m_x)(m_n + m_e - m_x)(m_n - m_e + m_x)}}{m_n^2 - m_e^2 - m_x^2},$$

ahol most is $m_x = m_p + m_\nu$. Numerikusan (fénysebességi egységekben mérve) $v_m = 0,001\,265\,38 \approx 0,001\,27$.

3.B feladat. Lebegtetés fénnnyel

A függőlegesen felfelé haladó fénysugarak (fotonok) – amikor az üvegen áthaladnak – irányt változtatnak, és emiatt a lendületük (impulzusuk) függőleges komponense lecsökken. Az egységnyi idő alatt „leadott impulzus” a félgömbre ható fény-nyomóerővel egyenlő, és ha ez az erő éppen egyenlő az üveg súlyával, akkor a test lebeghet. Kövessük végig mindezt számítással is!

b) Tekintsük a lézerefény-nyaláb azon részét, amelynek az optikai tengelytől mért távolsága x és $x + \Delta x$ közé esik (ahol $\Delta x \ll x$). Ebbe a tartományba a lézer teljes P teljesítményének csak egy kis hányada, a területek arányának megfelelően

$$\Delta P = \frac{2\pi x \Delta x}{\delta^2 \pi} P$$

érkezik, vagyis a kérdéses tartományba egységnyi idő alatt

$$\Delta n = \frac{\Delta P}{hf} = \frac{2xP}{\delta^2 hf} \Delta x$$

számú (egyenként hf energiával rendelkező) foton érkezik. (Itt f a lézerefény frekvenciája, h pedig a Planck-állandó.)

A fénysugarak irányváltozása szempontjából célszerű az üveg félgömb középső (az optikai tengelyhez közeli) tartományát gondolatban két részre bontani: egy planparalel lemezre (amely a rá merőlegesen eső fénysugarakat nem töri meg) és egy síkdomború vékony lencsére, amelynek $f_0 = \frac{R}{n-1}$ a fókusz távolsága. Ez utóbbi $\theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f_0} = \frac{x}{R}(n-1)$

szöggel téríti el a fotonokat, azok kezdeti $I = \frac{hf}{c}$ impulzusa tehát

$$\Delta I = \frac{hf}{c}(1 - \cos \theta) = \frac{hf}{c} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{hf}{c} \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{hf}{c} \frac{x^2(n-1)^2}{2R^2}$$

értékkel lecsökken (c a fénysebesség vákuumban). A teljes impulzusváltozás az egyes fotonok impulzusváltozásának összege:

$$I = \sum \Delta n \Delta I = \sum \frac{2xP}{\delta^2 hf} \Delta x \cdot \frac{hf}{c} \frac{x^2(n-1)^2}{2R^2} = \frac{P(n-1)^2}{\delta^2 c R^2} \sum x^3 \Delta x.$$

A legutolsó kifejezésben szereplő összeg a felosztás finomításával (Δx egyre kisebb tételével) egy integrálba megy át:

$$\sum x^3 \Delta x \rightarrow \int_0^\delta x^3 dx = \frac{\delta^4}{4},$$

így az egyensúly feltétele $I = \frac{P(n-1)^2 \delta^2}{4cR^2} = mg$, ahonnan a kérdéses lézerteljesítmény:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2}.$$