

2. feladat. Piezoelektromos kristályrezonátor elektromos váltófeszültséggel

a) A rúd bal oldali részének deformációja (relatív hosszváltozása)

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{-v \Delta t}{u \Delta t} = \frac{-v}{u},$$

a nyomás tehát a bal oldali felületnél

$$p = -Y S = Y \frac{v}{u} = \rho u v.$$

(Kihasználtuk, hogy a lökéshullám terjedési sebessége $u = \sqrt{Y/\rho}$.)

b) Ha a rúd (helyről helyre és pillanatról pillanatra változó) elmozdulása

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut),$$

akkor a sebesség (deriválással, vagy a forgómozgással való analógia kihasználásával)

$$v(x, t) = -k u \xi_0 \cos k(x - ut),$$

a deformáció (az előző alkérdés eredményének felhasználásával, vagy közvetlenül az elmozdulásfüggvény x szerinti deriválásával)

$$S(x, t) = \frac{-v(x, t)}{u} = k \xi_0 \cos k(x - ut),$$

a nyomás pedig

$$p(x, t) = \rho u v(x, t) = -k \rho u^2 \xi_0 \cos k(x - ut) = -Y S(x, t).$$

c) A hasáb közepe nem tud elmozdulni, így $g(b/2) \equiv 0$, emiatt $B_2 = 0$. Másrészt $g(x)$ maximális értéke 1, ebből $B_1 = \pm 1$ következik.

d) A hasáb két végénél a nyomás (és ezzel együtt a deformáció is) minden pillanatban nulla. Ez akkor teljesül, ha a hasáb szélei (a nyitott végű csövekben kialakuló hanghullámokhoz hasonlóan) az állóhullám duzzadóhelyei. Eszerint a legnagyobb lehetséges hullámhossz a hasáb b hosszának kétszerese, a megfelelő frekvencia pedig

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273 \text{ kHz}.$$

A második legkisebb frekvencia (ami annak felel meg, hogy a hasáb hossza a félhullámhossz háromszorosa):

$$f_2 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 819 \text{ kHz}.$$

e) A piezoelektromos hatást leíró egyik egyenletből kifejezhetjük a mechanikai feszültséget:

$$(5) \quad T = (S - d_p E) Y,$$

majd ezt a másik egyenletbe helyettesítve az elektromos töltéssűrűsége

$$(6) \quad \sigma = d_p Y \cdot S + (\varepsilon_T - d_p^2 Y) E$$

adódik. Az elektromos térerősséget a megadott elektromos feszültségből számíthatjuk:

$$(7) \quad E(x, t) = \frac{U(t)}{h} = \frac{U_m \cos \omega t}{h}.$$

Mivel E időfüggése $\cos \omega t$ alakú, feltehetjük, hogy a hasáb S deformációja is így változik időben, vagyis

$$(8) \quad \xi(x, t) = \xi_m \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cdot \cos \omega t,$$

$$(9) \quad S(x, t) = k \xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cdot \cos \omega t.$$

Helyettesítsük (7)-et és (9)-et az (5) egyenletbe, és használjuk ki, hogy a hasáb széleinél (pl. $x = 0$ -nál) a mechanikai feszültség nulla. Innen a rezgés amplitúdójára

$$\xi_m = \frac{d_p U_m}{h k \cos(kb/2)}$$

adódik, (6)-ból pedig leolvashatjuk, hogy a kérdéses együtthatók:

$$D_1 = \frac{d_p^2 Y}{\cos(kb/2)} \quad \text{és} \quad D_2 = \varepsilon_T - d_p^2 Y.$$

f) Az előző pontban kiszámított felületi töltéssűrűséget x szerint integrálva megkapjuk a hasáb egyik kontaktusán levő teljes töltést:

$$Q(t) = w \int_0^b \sigma(x, t) dx = C_0 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] U(t),$$

ahol $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ a hasáb (mint w széles, b hosszú és h vastagságú síkkondenzátor) alacsony frekvenciákon ($\omega = ku \approx 0$) érvényes kapacitása, és

$$\alpha^2 = \frac{Y d_p^2}{\varepsilon_T} = 9,82 \cdot 10^{-3},$$

az ún. *elektromechanikus csatolási állandó* négyzete.