Megoldás. Ha az U gyorsítófeszültség „nem túl nagy”, a mozgás nemrelativisztikus (a sebességek elhanyagolhatók a fénysebesség mellett), és számolhatunk a newtoni dinamika törvényeivel. Tekintsük először azt az esetet, amikor egy q töltésű, m tömegű részecske U gyorsítófeszültség hatására v sebességre tesz szert. A munkatétel szerint

$$qU = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{ahonnan} \quad v = \sqrt{2U\frac{q}{m}}.$$

Látható, hogy adott U esetén a végsebesség a részecske q/m fajlagos töltésének négyzetgyökével arányos. Mivel a proton fajlagos töltése 2-szer nagyobb, mint az α-részecskéé, a kérdéses sebességarány:

$$\frac{v_\text{p}}{v_\alpha} = \sqrt{\frac{q_\text{p}}{m_\text{p}} \cdot \frac{m_\alpha}{q_\alpha}} = \sqrt{\frac{q_\text{p}}{m_\text{p}} \cdot \frac{4m_\text{p}}{2q_\text{p}}} = \sqrt{2}.$$

Ha egy m_0 nyugalmi tömegű, q töltésű részecskét a fénysebességgel összemérhető sebességre gyorsítunk, akkor a munkatétel relativisztikus alakját kell alkalmaznunk:

$$qU + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Innen a sebességet kifejezve:

$$v = c\sqrt{1 - \left(1 + \frac{qU}{m_0c^2}\right)^{-2}}.$$

Ebben a kifejezésben is a részecskének csak a fajlagos töltése szerepel, de más formában, mint a nemrelativisztikus esetben. A kérdéses sebességarány:

$$\frac{v_\text{p}}{v_\alpha} = \sqrt{\frac{1 - \left(1 + \frac{eU}{m_\text{p}c^2}\right)^{-2}}{1 - \left(1 + \frac{eU}{2m_\text{p}c^2}\right)^{-2}}},$$

ahol e a proton töltése (az elemi töltés), m_p pedig a proton nyugalmi tömege. Ez a kifejezés $eU \ll m_\text{p}c^2$ esetben kb. $\sqrt{2}$, ha viszont a gyorsítófeszültséget gigavolt (10^9 V) nagyságrendűre, vagy még ennél is nagyobbra növeljük (ennél a feszültségnél éri el a proton mozgási energiája a nyugalmi energia nagyságrendjét), akkor a sebességarány egyre csökken, és az $eU \gg m_\text{p}c^2$ határesetben

$$\frac{v_\text{p}}{v_\alpha} \to 1.$$

() *Rácz Éva* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján