

Megoldás. Azt a kijelentést, hogy a leugró kutya és a szánkó relatív sebessége u , kétféleképpen is érthetjük:

I. értelmezés: A kutya sebessége a szánkó *eredeti* sebességéhez képest u .

II. értelmezés: A kutya sebessége a szánkó *megváltozott* sebességéhez képest u .

Tekintsük először az I. értelmezést! Jelöljük a szánkó sebességét a kutya i -edik ugrása után v_i -vel; ekkor az n -edik leugrás után v_{2n-1} a szánkó sebessége, az n -edik felugrás után pedig v_{2n} . A lendületmegmaradás törvénye szerint a leugrásoknál

$$(1) \quad (M + m)v_{2n} = m(v_{2n} - u) + Mv_{2n+1},$$

a kutya felugrásainál pedig

$$(2) \quad mv + Mv_{2n+1} = (M + m)v_{2n+2}.$$

Ezekből a szánkó megváltozott sebességeit kifejezve:

$$(3) \quad v_{2n+2} = \alpha \cdot v_{2n} + \beta,$$

továbbá

$$(4) \quad v_{2n+1} = v_{2n} + \gamma,$$

ahol

$$(5) \quad \alpha = \frac{M}{m + M}, \quad \beta = \frac{m}{m + M}(u + v), \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{m}{M}u.$$

A (3) rekurziós képletből és a $v_0 = 0$ kezdőfeltételből közvetlenül adódik, hogy $v_2 = \beta$, $v_4 = \beta(1 + \alpha)$, $v_6 = \beta(1 + \alpha + \alpha^2)$, és általában

$$v_{2n} = \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}) = \beta \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}.$$

Innen (4) alapján

$$(6) \quad v_{2n-1} = \beta \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha} + \gamma.$$

A kutya csak akkor ugorhat fel n -edszer is a szánkóra, ha utoléri azt, vagyis ha $v > v_{2n-1}$. Innen

$$n < 1 + \frac{\log \left(1 - \frac{(v-\gamma)(1-\alpha)}{\beta} \right)}{\log \alpha} = 1 + \frac{\log \left(\frac{u}{u+v} \cdot \frac{M+m}{M} \right)}{\log \frac{M}{M+m}} \approx 7,6.$$

A kutya tehát 7-szer tud a szánkóra felugrani, és a 7. felugrás után a közös sebességük $v_{14} = (u+v) \left[1 - \left(\frac{M}{M+m} \right)^7 \right] \approx$

$3,90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ha a kutya még egyszer leugrana, akkor a szánkó sebessége 4,06 m/s-ra nőne.

Tekintsük most a II. értelmezést! A lendületmegmaradás törvénye ekkor (1) helyett

$$(1') \quad (M + m)v_{2n} = m(v_{2n+1} - u) + Mv_{2n+1}$$

módon írható fel, amelyből alakilag ugyanolyan összefüggések adódnak, mint az I. értelmezésnél, csupán az (5)-ben szereplő mennyiségek változnak meg:

$$(5') \quad \alpha = \frac{M}{m + M}, \quad \beta = \frac{m}{m + M} \left(\frac{M}{m + M}u + v \right), \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{m}{M+m}u.$$

A további képletek is változatlanul érvényesek, és a megadott számadatokkal ennél az értelmezésnél az adódik, hogy a kutya 8-szor ugorhat fel a szánkóra, és a végsebesség $v_{16} = 3,94 \text{ m/s}$ lesz.

()

Koltai Péter (Révkomárom, Selye J. Gimn. 12. o.t.) és *Szabó Áron* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. 11. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az olyan megoldás, amely nem ad meg általános képletet, hanem végigszámolja a 7 vagy 8 leugrást és felugrást, csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha közben nem végez kerekítést, vagy legalább utal arra, hogy a kerekítések nem befolyásolják a végeredményt. Az ezt elmulasztó, egyéb hibát nem tartalmazó megoldások 4 pontot kaptak.