

I. megoldás. Vizsgáljuk először a $k > 1$ esetet! A kérdéses ε szög – amely a vizsgált tartományban hegyesszög – akkor a legnagyobb, amikor a tangense maximális. Ez viszont könnyen kifejezhető α -val:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{F \sin \alpha}{Fk + F \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{k + \cos \alpha} = f(\alpha).$$

Ennek a függvénynek a maximumát differenciálszámítás segítségével határozhatjuk meg. A derivált eltűnésének feltétele:

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha \cdot (k + \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{(k + \cos \alpha)^2} = \frac{k \cos \alpha + 1}{(k + \cos \alpha)^2} = 0,$$

ahonnan a szélsőértéknek megfelelő α_0 szögre $\cos \alpha_0 = -\frac{1}{k}$. Ennél a szögnél az $f(\alpha)$ függvény második deriváltja negatív, tehát α_0 -nál valóban maximumot találunk. ε legnagyobb értéke:

$$\varepsilon_{\max} = \operatorname{arctg} f(\alpha_0) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Látható, hogy $\alpha_0 > 90^\circ$, de $\varepsilon_{\max} < 90^\circ$.

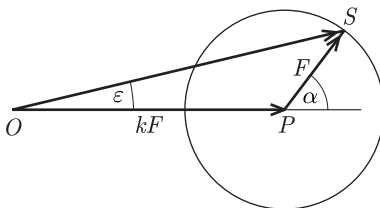
Ha $k = 1$, akkor a két összegzendő erő egy rombuszt feszít ki. Az eredő erő ennek a rombusznak az átlója, ami szögfelelő, tehát $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Ha $0 < \alpha < 180^\circ$, akkor $0 < \varepsilon < 90^\circ$. Ezen tartományon ε -nak nincs legnagyobb értéke, csak felső határa (nevezetesen a derékszög), és ezt a felső határt tetszőlegesen megközelítheti. Ha $\alpha = 180^\circ$, akkor az eredő erő nullvektor, melynek nincs határozott iránya.

()

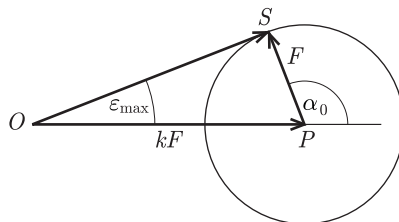
Mezei Márk (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., 11. o.t.)

II. megoldás. A feladat elemi geometriai úton is megoldható. Az eredő $\vec{OS}$ erőt úgy is megkaphatjuk, hogy a kF nagyságú $\vec{OP}$ erő végpontjából felmérjük az F nagyságú $\vec{PS}$ erőt (1. ábra). Ha az α szöget változtatjuk, az S pont egy F sugarú köríven fog mozogni. Az ε szög akkor a legnagyobb, amikor az OS egyenes érinti a kört, vagyis ha OS merőleges PS -re (2. ábra). Ennek a helyzetnek megfelelő szögekre fennáll: $\cos(180^\circ - \alpha_0) = -\cos \alpha_0 = \frac{1}{k}$, illetve

$$\sin \varepsilon_{\max} = \frac{F}{kF}, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon_{\max} = \arcsin \frac{1}{k} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$



1. ábra



2. ábra

Ha $k = 1$, akkor az O pont rajta fekszik a körön. Ilyenkor az ε szög 0 és 90° között változik, de a felső határát (a derékszöget) nem érheti el, csak tetszőlegesen megközelítheti azt.

()

Sótér Anna (Székesfehérvár, Ciszterci Szent István. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján