

1. Egy-egy kerék tehetetlenségi nyomatékának meghatározása

Egy $0,025\ M$ tömegű, $0,8\ R$ sugarú küllő tehetetlenségi nyomatéka (a végpontjára vonatkoztatva) az ismert $\Theta = ml^2/3$ elméleti formula alapján $\Theta_{\text{küllő}} = 5,33 \cdot 10^{-3} MR^2$. A kerék hengeres részének tehetetlenségi nyomatéka a tömör henger és a lyukat kitöltő tömör henger tehetetlenségi nyomatékának különbségeként számolható. A tömeg- és területarányok egyenlősége alapján kapható, hogy $m_{\text{tömör}} = 2,22\ M$, $m_{\text{lyuk}} = 1,42\ M$, a sugarak pedig $0,8\ R$ és R . Felhasználva, hogy egy tömör henger esetén $\Theta = mR^2/2$, a vizsgált henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta_{\text{henger}} = \Theta_{\text{tömör}} - \Theta_{\text{lyuk}} = \frac{1}{2}[m_{\text{tömör}}R^2 - m_{\text{lyuk}}(0,8R)^2] = 0,656 MR^2$, a kerék egészének tehetetlenségi nyomatéka pedig: $\Theta = \Theta_{\text{henger}} + 8\Theta_{\text{küllő}} = 0,699 MR^2 \approx 0,7 MR^2$.

2. A mozgásegyenletek

Az $5M$ tömegű kocsitestre a nehézségi erő és a kerekek (azok forgástengelye) által kifejtett erő hat.

4. ábra

A kerekek által kifejtett erőket célszerű lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontani. Mivel a kocsitest a lejtőn lefelé haladva gyorsul, de nem forog, mozgásegyenletei a *4. ábra* jelöléseivel a következő alakba írhatók:

$$(1) \quad 5Ma = 5Mg \sin \alpha - K_1 - K_2,$$

$$(2) \qquad 5Mg \cos \alpha = N_1 + N_2,$$

$$(3) \qquad N_2 l = N_1 l + K_1 h + K_2 h.$$

Az M tömegű, R sugarú, $0,7 MR^2$ tehetetlenségi nyomatékú hátsó kerékre a gravitációs erőn túl tengelynél a kocsitest, a talajjal érintkező pontban pedig a lejtő fejt ki erőt (5. ábra). A kerék tömegközéppontjának gyorsulása a , a szöggyorsulást pedig jelölje β_1 . A kerék mozgásegyenletei:

$$(4) \qquad Ma = K_1 - S_1,$$

$$(5) \qquad Mg \cos \alpha + N_1 = T_1,$$

$$(6) \qquad 0,7 MR^2 \beta_1 = S_1 R.$$

Ha a hátsó kerék tisztán gördül, akkor:

$$(7/a) \qquad a = R\beta_1,$$

ha viszont csúszva gördül, akkor:

$$(7/b) \qquad S_1 = \mu_k N_1.$$

6. ábra

Az első keréknél (*6. ábra*) a hátsó kerékhez hasonlóan:

$$(8) \quad Ma = K_2 - S_2,$$

$$(9) \quad Mg \cos \alpha + N_2 = T_2,$$

$$(10) \quad 0,7 MR^2 \beta_2 = S_2 R.$$

Tiszta gördülésnél

$$(11/a) \quad a = R\beta_2,$$

ha pedig csúszva gördül, akkor:

$$(11/b) \quad S_2 = \mu_k N_2.$$

3. A különböző mozgástípusok elemzése

a) Tételezzük fel, hogy olyanok a viszonyok, hogy *mindkét kerék tisztán gördül*. Ekkor az (1)–(11) egyenletrendszer tiszta gördülésre vonatkozó egyenleteinek megoldása:

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{6}g \sin \alpha, & \beta_1 &= \beta_2 = \frac{5}{6}\frac{g}{R} \sin \alpha, \\ S_1 &= S_2 = \frac{7}{12}Mg \sin \alpha, \\ K_1 &= K_2 = \frac{5}{12}Mg \sin \alpha, \\ N_1 &= \left(\frac{5}{2} \cos \alpha - \frac{5h}{12l} \right) Mg, & N_2 &= \left(\frac{5}{2} \cos \alpha + \frac{5h}{12l} \right) Mg \\ T_1 &= \left(\frac{7}{2} \cos \alpha - \frac{5h}{12l} \right) Mg, & T_2 &= \left(\frac{7}{2} \cos \alpha + \frac{5h}{12l} \right) Mg. \end{aligned}$$

A feltételezett tiszta gördülés akkor jön létre, ha $S_1 \leq \mu_s T_1$ és $S_2 \leq \mu_s T_2$ teljesül. Az erők behelyettesítésével látható, hogy a két feltétel közül a hátsó kerékre vonatkozó az erősebb, nevezetesen (a lejtő hajlásszögére megfogalmazva)

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\mu_s}{1 + \frac{5h}{7l} \mu_s}.$$

b) Ha a lejtő hajlásszöge egy kicsit meghaladja ezt a kritikus értéket, akkor *a hátsó kerék csúszva, az első kerék pedig tisztán gördül*. Az (1)–(11) egyenletrendszernek ezt az állapotot leíró egyenleteiből – hosszú számolással – a következőt kaphatjuk:

$$a = \frac{\left(1 + \frac{5h\mu_k}{14l}\right) \sin \alpha - \frac{1}{2}\mu_k \cos \alpha}{\frac{11}{10} + \frac{5h}{11l}\mu_k}.$$

Az első kerék tiszta gördülésének feltétele: $S_2 \leq \mu_s T_2$. Ezt a feltételt a hajlásszögre kifejtve a következő adódik:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{6\mu_s + 77\mu_k + \frac{325h}{7l}\mu_s\mu_k}{14 - \frac{5h}{l}(\mu_s - \mu_k)}.$$

c) Ha a lejtő hajlásszöge ezt kritikus értéket is meghaladja, akkor *mindkét kerék csúszva gördül*. Az (1)–(11) egyenletrendszer ide vonatkozó egyenleteiből a kocs gyorsulására és a kerekek szöggyorsulására a következő eredmény adódik:

$$\begin{aligned} a &= g(\sin \alpha - \mu_k \cos \alpha), \\ \beta_1 &= \frac{5}{7}\frac{g}{R}\mu_k \left(7 - \frac{5h}{l}\mu_k\right) \cos \alpha, \\ \beta_2 &= \frac{5}{7}\frac{g}{R}\mu_k \left(7 + \frac{5h}{l}\mu_k\right) \cos \alpha. \end{aligned}$$

4. A hirtelen megcsúszó jármű esete

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor az álló helyzetből induló jármű kerekei d úton tisztán gördülnek, majd $s - d$ úton mozgásuk csúszva gördülés. Jelölje a_t , illetve a_{cs} a jármű gyorsulását a tiszta gördülés, illetve a csúszás szakaszában, $\beta_{\text{első}}$, illetve $\beta_{\text{hátsó}}$ a kerekek szöggyorsulását a csúszva gördülés idején. (Ezeket a mennyiségeket a 3. részfeladatban meghatároztuk.) Az egyenletesen változó mozgásra vonatkozó kinematikai összefüggések felhasználásával könnyen kapható a jármű végsebessége, illetve az egyes kerekek szögsebessége:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2a_t d + 2a_{cs}(d - s)}, \\ \omega_{\text{első}} &= \frac{\sqrt{2a_t d}}{R} + \beta_{\text{első}} \frac{\sqrt{2a_t d + 2a_{cs}(d - s)} - \sqrt{2a_t d}}{a_{cs}}, \\ \omega_{\text{hátsó}} &= \frac{\sqrt{2a_t d}}{R} + \beta_{\text{hátsó}} \frac{\sqrt{2a_t d + 2a_{cs}(d - s)} - \sqrt{2a_t d}}{a_{cs}}. \end{aligned}$$