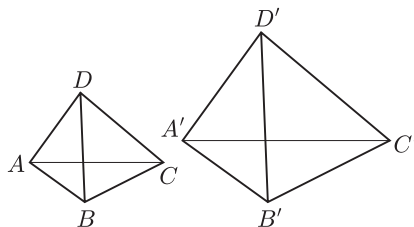


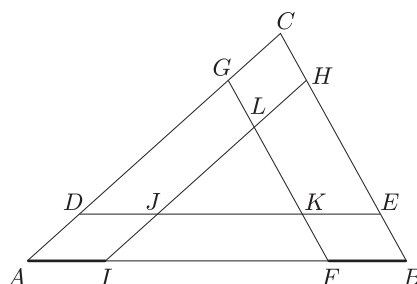
Megoldás. Ismert, hogy ha két tetraéder lapjai párhuzamosak, akkor a tetraéderek hasonlók egymáshoz (1. ábra). Hasonló tetraéderek térfogatának aránya pedig megegyezik megfelelő oldalaik arányának köbével.



1. ábra

Tekintsük az egységnyi térfogatú \mathcal{T} tetraédernek azt a lapját, mellyel nem húztunk párhuzamos síkot. Ha ez a lap ABC , akkor a \mathcal{T} térfogatát felező, annak lapjaival párhuzamos síkok ABC -t rendre a DE , FG , HI szakaszokban metszik. Ezek a szakaszok (a síkok párhuzamossága miatt) párhuzamosak az ABC háromszög megfelelő oldalaival, hosszukra pedig (a térfogat felezése miatt) teljesül, hogy

$$AB : DE = BC : FG = CA : HI = \sqrt[3]{2}.$$



2. ábra

Jelöljük a DE , FG , HI szakaszok metszéspontjai által meghatározott háromszög csúcsait a 2. ábrán látható módon J , K , L -l. A JKL háromszög a feladatban szereplő új tetraéder egyik lapja. Az $AFED$ és az $IBED$ négyszögek paralelogrammák, hiszen például $AF = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}AB = ED$. Így

$$AI = FB = AB - DE = AB \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Az $AIJD$ és az $FBEK$ négyszögek is paralelogrammák, azért

$$\begin{aligned} JK &= DE - (DJ + KE) = DE - (AI + FB) = \\ &= AB \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \right) = \frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot AB. \end{aligned}$$

Mivel az új tetraéder JK élének \mathcal{T} AB éle felel meg, a két hasonló tetraéder térfogatának aránya

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 : 1.$$

Tehát a feladatban szereplő új tetraéder térfogata

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 = \frac{11}{2} - 27\sqrt[3]{2} + 18\sqrt[3]{4} \approx 0,0554$$

térfogategység.

()
dolgozatának felhasználásával

Mészáros Gábor (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 9. évf.)