I. megoldás. Fejezzük ki az első egyenletből z-t, helyettesítsük a második egyenletbe és rendezzünk v hatványai szerint:

$$v^2 + (x + 2y - ty)v + (y^2 + tx^2 + txy) = 0. \tag{3}$$

A feladat egyenletrendszerének pontosan akkor van egy megoldása, ha a (3) egyenletnek egy megoldása van. Ez utóbbinak minden t-re megoldása $(x, y, v) = (0, 0, 0)$, a (3) egyenletnek tehát pontosan akkor van egy megoldása, ha bármely $(x, y) \neq (0, 0)$ számpár esetén a v-re adódó másodfokú egyenletnek nincsen megoldása, a diszkriminánsa negatív:

$$\begin{aligned} D &= (x + 2y - ty)^2 - 4(y^2 + tx^2 + txy) = \\ &= (1 - 4t)x^2 + 2(2 - 3t)xy + t(t - 4)y^2 < 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ha $y = 0$, akkor (4) akkor és csak akkor teljesül minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén, ha $1 - 4t < 0$, azaz

$$\frac{1}{4} < t.$$

Ha $y \neq 0$, akkor $y^2 > 0$-val osztva a (4)-gyel ekvivalens

$$(1 - 4t)\frac{x^2}{y^2} + 2(2 - 3t)\frac{x}{y} + t(t - 4) < 0$$

feltételt kapjuk, ami pontosan akkor teljesül, ha ennek az $\frac{x}{y}$-ra nézve másodfokú kifejezésnek a főegyütthatója is és a diszkriminánsa is negatív:

$$1 - 4t < 0 \quad \text{és} \quad 4(2 - 3t)^2 - 4(1 - 4t)t(t - 4) = 16(t + 1)(t^2 - 3t + 1) < 0.$$

Mivel

$$t^2 - 3t + 1 = \left(t - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{4} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

a t-re talált feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

A t-nek ezekre az értékeire az $y = 0$ esetben is csak a triviális megoldást kapjuk, azért a feladat egyenletrendszerének pontosan akkor van egy megoldása, ha

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

() *Salát Máté* (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az egyenletrendszernek minden t-re megoldása $x = y = z = v = 0$, így a t paraméternek azokat az értékeit keressük, amikor más megoldás nincsen. Keressünk $(1, p, -p, -1)$ alakú nem triviális megoldást. A (2) egyenletből ekkor $p^2 + 2(t - 1)p + t = 0$ adódik, ennek a másodfokú egyenletnek pedig pontosan akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa, $4(t - 1)^2 - 4t$ nem negatív, azaz

$$t \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leq t.$$

Megmutatjuk, hogy minden más esetben, azaz ha $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, akkor az egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van, (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $x = y = z = v = 0$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a $t \leq 1$ kiegészítő föltevésre. (Ha $t > 1$, akkor (2)-t $\frac{1}{t}$-vel szorozva hasonlóan okoskodhatunk.)

(2) bal oldalát átalakíthatjuk, ha (1)-et négyzetre emeljük:

$$(xy + yz + zv) + t(xz + xv + yv) = -\frac{1}{2}\big(x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + 2(1 - t)(xz + xv + yv)\big),$$

így (2) az

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + 2s(xz + xv + yv) = 0,$$

alakba írható, ahol $s = 1 - t$. Írjuk ezt az összeget a következő módon:

$$A = (sx + z)^2 + s(x + v)^2 + (y + sv)^2 + (1 - s^2 - s)(x^2 + v^2) = 0. \tag{5}$$

A t-re vonatkozó $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ feltétel az s változóra azt jelenti, hogy

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < s < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{azaz} \quad s^2+s<1,$$

másrészt $t \leq 1$ miatt $s \geq 0$.

Az A összeg (5) alakjában tehát egyik tag sem negatív, így ha az összeg 0, akkor minden tagja 0. Az utolsó tagban $1-s^2-s>0$, azért $x^2+v^2=0$, azaz $x=v=0$. Ekkor pedig $sx+z=y+sv=0$ miatt $y=z=0$ is teljesül. Beláttuk tehát, hogy ha $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < t < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, akkor a feladat egyenletrendszerének nincs a triviálistól különböző megoldása.