I. megoldás. Fejezzük ki az első egyenletből z-t, helyettesítsük a második egyenletbe és rendezzünk v hatványai szerint:

$$v^2+(x+2y-ty)v+(y^2+tx^2+txy)=0. \tag{3}$$

A feladat egyenletrendszerének pontosan akkor van egy megoldása, ha a (3) egyenletnek egy megoldása van. Ez utóbbinak minden t-re megoldása $(x,y,v)=(0,0,0)$, a (3) egyenletnek tehát pontosan akkor van egy megoldása, ha bármely $(x,y)\neq(0,0)$ számpár esetén a v-re adódó másodfokú egyenletnek nincsen megoldása, a diszkriminánsa negatív:

$$\begin{aligned} D&=(x+2y-ty)^2-4(y^2+tx^2+txy)=\\ &=(1-4t)x^2+2(2-3t)xy+t(t-4)y^2<0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ha $y=0$, akkor (4) akkor és csak akkor teljesül minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén, ha $1-4t<0$, azaz

$$\frac{1}{4}<t.$$

Ha $y\neq 0$, akkor $y^2>0$-val osztva a (4)-gyel ekvivalens

$$(1-4t)\frac{x^2}{y^2}+2(2-3t)\frac{x}{y}+t(t-4)<0$$

feltételt kapjuk, ami pontosan akkor teljesül, ha ennek az $\dfrac{x}{y}$-ra nézve másodfokú kifejezésnek a főegyütthatója is és a diszkriminánsa is negatív:

$$1-4t<0 \quad \text{és} \quad 4(2-3t)^2-4(1-4t)t(t-4)=16(t+1)(t^2-3t+1)<0.$$

Mivel

$$t^2-3t+1=\left(t-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\left(t-\frac{3+\sqrt5}{2}\right) \quad \text{és} \quad \frac14<\frac{3-\sqrt5}{2},$$

a t-re talált feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{3-\sqrt5}{2}<t<\frac{3+\sqrt5}{2}.$$

A t-nek ezekre az értékeire az $y=0$ esetben is csak a triviális megoldást kapjuk, azért a feladat egyenletrendszerének pontosan akkor van egy megoldása, ha

$$\frac{3-\sqrt5}{2}<t<\frac{3+\sqrt5}{2}.$$

() *Salát Máté* (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az egyenletrendszernek minden t-re megoldása $x=y=z=v=0$, így a t paraméternek azokat az értékeit keressük, amikor más megoldás nincsen. Keressünk $(1,p,-p,-1)$ alakú nem triviális megoldást. A (2) egyenletből ekkor $p^2+2(t-1)p+t=0$ adódik, ennek a másodfokú egyenletnek pedig pontosan akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa, $4(t-1)^2-4t$ nem negatív, azaz

$$t\le\frac{3-\sqrt5}{2} \quad \text{vagy} \quad \frac{3+\sqrt5}{2}\le t.$$

Megmutatjuk, hogy minden más esetben, azaz ha $\dfrac{3-\sqrt5}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt5}{2}$, akkor az egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van, (1)-ből és (2)-ből következik, hogy $x=y=z=v=0$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a $t\le 1$ kiegészítő föltevésre. (Ha $t>1$, akkor (2)-t $\dfrac{1}{t}$-vel szorozva hasonlóan okoskodhatunk.)

(2) bal oldalát átalakíthatjuk, ha (1)-et négyzetre emeljük:

$$(xy+yz+zv)+t(xz+xv+yv)=-\frac12\big(x^2+y^2+z^2+v^2+2(1-t)(xz+xv+yv)\big),$$

így (2) az

$$A=x^2+y^2+z^2+v^2+2s(xz+xv+yv)=0,$$

alakba írható, ahol $s=1-t$. Írjuk ezt az összeget a következő módon:

$$A=(sx+z)^2+s(x+v)^2+(y+sv)^2+(1-s^2-s)(x^2+v^2)=0. \tag{5}$$

A t-re vonatkozó $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ feltétel az s változóra azt jelenti, hogy

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<s<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{azaz} \quad s^2+s<1,$$

másrészt $t\le 1$ miatt $s\ge 0$.

Az A összeg (5) alakjában tehát egyik tag sem negatív, így ha az összeg 0, akkor minden tagja 0. Az utolsó tagban $1-s^2-s>0$, azért $x^2+v^2=0$, azaz $x=v=0$. Ekkor pedig $sx+z=y+sv=0$ miatt $y=z=0$ is teljesül. Beláttuk tehát, hogy ha $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, akkor a feladat egyenletrendszerének nincs a triviálistól különböző megoldása.