

Megoldás. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\alpha = \beta$ és $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$. Ekkor az egyenlet:

$$\begin{aligned}2 \sin^2 \alpha &= \sin \gamma = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha, \quad \text{azaz} \\2 \sin^2 \alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Egyszerűsítve az egyenletet $2 \sin \alpha \neq 0$ -val kapjuk, hogy $\sin \alpha = \cos \alpha$. Mivel $0 < \alpha < 180^\circ$, ez csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = 45^\circ$ és $\gamma = 90^\circ$. Ekkor a háromszög derékszögű és egyenlő szárú.

2. eset: $\alpha = \gamma$ és $\beta = 180^\circ - 2\alpha$. Ekkor az egyenlet:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \alpha.$$

A β értéket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + (\sin 2\alpha)^2 &= \sin \alpha, \\ \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \sin \alpha.\end{aligned}$$

Egyszerűsítve $\sin \alpha \neq 0$ -val, a $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ helyettesítés után:

$$4 \sin^3 \alpha - 4 \sin \alpha - \sin \alpha + 1 = 0.$$

Innen $4 \sin \alpha \cdot (\sin^2 \alpha - 1) - (\sin \alpha - 1) = 0$. Alakítsunk szorzattá:

$$(\sin \alpha - 1) \cdot [4 \sin \alpha \cdot (\sin \alpha + 1) - 1] = 0.$$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $\sin \alpha - 1 = 0$, akkor $\sin \alpha = 1$, $\alpha = 90^\circ$. Mivel $\alpha = \gamma$, ez nem lehetséges. Ha $4 \sin \alpha \cdot (\sin \alpha + 1) - 1 = 0$, akkor a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha - 1 = 0.$$

Innen $\sin \alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < -1$, nem lehet megoldás; $\sin \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \approx 0,2071$, $\alpha_2 \approx 11,95^\circ$. A háromszög szögei a második esetben $\alpha = \gamma \approx 11,95^\circ$, $\beta \approx 156,1^\circ$.

()

Antal László (Eger, Szilágy E. Gimn. és Koll., 11. évf.)