

I. megoldás. A feladatban adott szögfüggvényeket a $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ azonosság segítségével átírjuk úgy, hogy szinusz helyett koszinusz szerepeljen bennük. Eszerint a $\cos 65^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 5^\circ = \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 10^\circ$ egyenlőséget kell bizonyítanunk. A megoldás során felhasználunk egy, a függvénytáblázatban is megtalálható összefüggést:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Ezt a $8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta$ kifejezésre felírva egy 8-tagú összeget kapunk:

$$\begin{aligned} 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta &= 2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)][\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta)] = \\ &= 2[\cos(\alpha + \beta)\cos(\gamma + \delta) + \cos(\alpha + \beta)\cos(\gamma - \delta) + \\ &+ \cos(\alpha - \beta)\cos(\gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta)\cos(\gamma - \delta)] = \\ &= \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma - \delta) + \\ &+ \cos(\alpha + \beta - \gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta + \gamma - \delta) + \\ &+ \cos(\alpha - \beta - \gamma - \delta) + \cos(\alpha - \beta - \gamma + \delta). \end{aligned}$$

Írjuk át a bal oldal 8-szorosát ennek megfelelően:

$$\begin{aligned} 8 \cos 65^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 5^\circ &= \cos 155^\circ + \cos 85^\circ + \\ &+ \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-25^\circ) + \cos 35^\circ + \cos(-15^\circ). \end{aligned}$$

Írjuk most át a jobb oldal 8-szorosát:

$$\begin{aligned} 8 \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 10^\circ &= \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \\ &+ \cos 125^\circ + \cos 115^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-5^\circ) + \cos 25^\circ + \cos 15^\circ. \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $\cos \xi = \cos(-\xi)$. Innen

$$\begin{aligned} \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos(-25^\circ) + \cos(-15^\circ) &= \\ = \cos 145^\circ + \cos 95^\circ + \cos 45^\circ + \cos 25^\circ + \cos 15^\circ. \end{aligned}$$

Ezután a megmaradó $\cos 155^\circ + \cos 85^\circ + \cos 35^\circ = \cos 125^\circ + \cos 115^\circ + \cos(-5^\circ)$ egyenlőséget kell bizonyítanunk.

A $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ összefüggést a bal oldalon 85° -ra és 35° -ra, míg a jobb oldalon 125° -ra és -5° -ra alkalmazva

$$\cos 85^\circ + \cos 35^\circ = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ = \cos 25^\circ$$

és

$$\cos 125^\circ + \cos(-5^\circ) = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 65^\circ = \cos 65^\circ.$$

Így a bizonyítandó állítás a $\cos 155^\circ + \cos 25^\circ = \cos 115^\circ + \cos 65^\circ$, ami az előzőekhez hasonlóan $2 \cos 90^\circ \cdot \cos 65^\circ$ és $2 \cos 90^\circ \cdot \cos 25^\circ$ egyenlőségét jelenti. $\cos 90^\circ = 0$, így az egyenlőség teljesül.

(1) *Hubai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozatának ötletéből

II. megoldás. A bizonyítandó állítás egy azonosságból következik:

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha).$$

A jobb oldalon $\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha) = \sin^2 60^\circ \cdot \cos^2 \alpha - \cos^2 60^\circ \cdot \sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha$. Maga a jobb oldal így $3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$, ami valóban $\sin 3\alpha$. Ez azt jelenti, hogy ha $\sin 3\alpha \neq 0$, akkor

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{4}.$$

A bizonyítandó egyenlőséget átrendezve

$$(2) \quad \frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 85^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

Mindkét oldalon az (1) azonosság bal oldala áll, a bal oldalon $\alpha = 25^\circ$, a jobb oldalon pedig $\alpha = 20^\circ$ helyettesítése után. A (2) egyenlőség tehát valóban teljesül, mindkét tört értéke $\frac{1}{4}$.