

I. megoldás. Legyen a gömb sugara r , a C csonkakúp alapköreinek sugara R_1 és R_2 , alkotóinak hossza pedig a . A csonkakúp magassága megegyezik a gömb sugarának kétszeresével, ezért térfogata

$$V = (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) \cdot (2r) \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Tekintsük a testeknek a csomkakúp tengelyére illeszkedő tetszőleges S síkkal való metszetét. A gömb és S metszete egy r sugarú kör, a csomkakúp és S metszete pedig egy, a kört érintő szimmetrikus trapéz (lásd az *ábrát*). Mivel a trapéz érintőnégyyszög, azért szemközti oldalainak összhossza megegyezik, azaz $a + a = 2R_1 + 2R_2$, tehát $a = R_1 + R_2$. Ezt felhasználva a csomkakúp felszíne

$$A = R_1^2 \cdot \pi + R_2^2 \cdot \pi + a \cdot (R_1 + R_2) \cdot \pi = 2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) \cdot \pi.$$

Tehát a csomkakúp térfogatának és felszínének aránya

$$\frac{A}{V} = \frac{(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) \cdot (2r) \cdot \frac{\pi}{3}}{2(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) \cdot \pi} = \frac{r}{3},$$

ahol r a beírható gömb sugara.

Megjegyzés. Feladatunk eredménye következik az általánosított **B. 3587.** feladat eredményéből, azaz a csomkakúpra vonatkozó állítás abból, hogy minden síklapokkal határolt testre ugyanaz a keresett arány. Az állítás ilyen módon történő bizonyítása lapunk internetes oldalán olvasható.

II. megoldás. Az adott r sugarú gömböt a C csanakakúp egy O középpontú, R sugarú K körvonal mentén érinti, ahol $r > R$. Ennek a körvonalnak a síkja párhuzamos a C alapköréit tartalmazó S_1 és S_2 síkokkal. Válasszunk tetszőlegesen nagy n természetes számot, és rajzoljunk a K kör köré egy n oldalú szabályos sokszöget, amit K' -vel jelölünk. Legyen K'' az a K -ba írt szabályos n -szög, amelyet K -ból O középpontú $\lambda = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ arányú kicsinyítéssel

kapunk. Húzzuk meg ezután C azon alkotóit, melyek tartalmazzák a K' sokszög csúcsait, és tekintsük azokat a síkokat, amelyek a csonkakúpot ezen alkotók mentén érintik. Ezek a síkok valamint az S_1 és S_2 síkok egy, az r sugarú gömb köré írt C' csonkakúlát zárnak közre. Ennek V' térfogata és A' felszíne között a **B. 3587.** feladat megoldása alapján fennáll a $\frac{V'}{A'} = \frac{r}{3}$ összefüggés.

Legyen most C'' az a csonkakúla, melyet C' -ből O középpontú λ arányú kicsinyítéssel nyerünk, ennek felülete tartalmazza a K'' sokszöget. Nyilvánvaló tehát, hogy C'' része egy, a C csonkakúpba írt csonkakúlának, C' pedig egy, a C köré írt csonkakúla. Ezért $V'' < V < V'$ és $A'' < A < A'$, ahol V'' és A'' a C'' csonkakúla térfogatát, illetve felszínét jelöli. Mivel $A'' = \lambda^2 A'$ és $V'' = \lambda^3 V'$, kapjuk, hogy

$$\lambda^3 \frac{r}{3} = \frac{V''}{V'} \cdot \frac{V'}{A'} = \frac{V''}{A'} < \frac{V}{A} < \frac{V'}{A''} = \frac{A'}{A''} \cdot \frac{V'}{A'} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{r}{3}.$$

Mínt hogy elegendően nagy n esetén λ tetszőlegesen közel eshet az 1-hez, $\frac{V}{A}$ értéke csakis $\frac{r}{3}$ lehet.