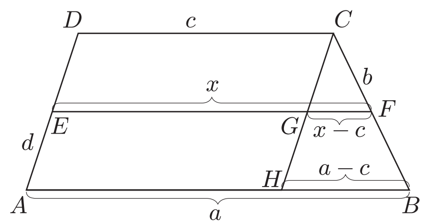
I. megoldás. Ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor a középvonala felezi a paralelogramma kerületét és területét is.

Tegyük fel, hogy az $ABCD$ trapéz nem paralelogramma, mégis létezik az alapjaival párhuzamos EF szakasz, amely a trapéz kerületét és területét is felezi.

Húzzunk párhuzamost (az *ábra* szerint) C-n keresztül AD-vel, ez az EF szakaszt G-ben, az AB szakaszt H-ban metszi.



A HBC háromszög hasonló a GFC háromszöghöz. Legyen $EF = x$. A HBC háromszög magassága legyen M, a GFC háromszögé pedig m. A hasonlóság miatt

$$\frac{m}{M} = \frac{GF}{HB} = \frac{x-c}{a-c}.$$

Feltevésünk szerint EF felezi a trapéz területét: $t_{EFCD} = \frac{1}{2} t_{ABCD}$, azaz

$$\frac{x+c}{2} m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} M, \qquad (x+c)\frac{m}{M} = \frac{a+c}{2}.$$

A hasonlóságot felhasználva: $(x+c)\dfrac{x-c}{a-c} = \dfrac{a+c}{2}$, ezért

$$x^2 - c^2 = \frac{a^2-c^2}{2}, \quad x^2 = \frac{a^2-c^2}{2} + c^2 = \frac{a^2+c^2}{2}, \quad x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

A HBC és GFC háromszög hasonlósága miatt $\dfrac{CF}{b} = \dfrac{DE}{d} = \dfrac{x-c}{a-c}$, ahonnan

$$CF = \frac{b(x-c)}{a-c} \quad \text{és} \quad DE = \frac{d(x-c)}{a-c}.$$

Tegyük fel ezután, hogy az EF szakasz a trapéz kerületét is felezi:

$$AB + BF + EA = FC + CD + DE,$$

$$a + b - CF + d - DE = FC + c + DE,$$

$$a - c + b + d = 2FC + 2DE,$$

$$a - c + b + d = 2\frac{b(x-c)}{a-c} + 2\frac{d(x-c)}{a-c},$$

$$a - c + b + d = \frac{2(b+d)(x-c)}{a-c} = \frac{2(b+d)\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}} - c\right)}{a-c},$$

$$(a-c)^2 + (a-c)(b+d) = (b+d)\left(\sqrt{2a^2+2c^2} - 2c\right),$$

$$(a-c)^2 = (b+d)\left(\sqrt{2a^2+2c^2} - a - c\right).$$

Fejezzük ki ebből $(b+d)$-t:

$$b + d = \frac{(a-c)^2}{\sqrt{2a^2+2c^2} - (a+c)}.$$

A nevező gyöktelenítése után: $b + d = \sqrt{2a^2+2c^2} + a + c$.

A fenti gondolatmenet lényegében megfordítható: ha a trapéz (nem paralelogramma) oldalaira teljesül a talált egyenlőség, akkor van olyan alapjaival párhuzamos egyenes, ami a kerületét és a területét is felezi, tehát a feladat kérdésére a válasz tagadó.

Ilyen trapéz valóban létezik: ha például $a=2$, $c=1$ és $b=d$, akkor a fenti egyenlőségbe behelyettesítve

$$b=d=\frac{3+\sqrt{10}}{2}>\frac{1}{2}=\frac{a-c}{2},$$

tehát ezek egy létező szimmetrikus trapéznak az adatai.

Poronyi Balázs (Pécs, Janus Pannonius Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai $a+c$ és a, szárai b és d. Ahhoz, hogy ilyen trapéz létezzen, szükséges és elegendő, hogy a b, c, d hosszúságok kielégítsék a háromszög egyenlőtlenségeket.

Tekintsünk egy e egyenest, ami párhuzamos a trapéz alapjaival, és a hosszabb és a rövidebb alap közötti távolságot $x:(1-x)$ arányban osztja. Az e egyenes pontosan akkor felezi a trapéz kerületét, ha $2a+b+c+d=2(a+c+bx+dx)$, azaz $(1-2x)(b+d)=c$.

Annak a feltétele pedig, hogy az e egyenes felezze a trapéz területét is: $2a+c=2x\big[2a+(2-x)c\big]$, hiszen az e egyenesből a trapéz egy $a+(1-x)c$ hosszúságú szakaszt metsz ki.

A feltételt a következő alakban is írhatjuk: $2a(1-2x)=(-2x^2+4x-1)c$.

Látható, hogy mind $1-2x$, mind $-2x^2+4x-1$ pozitív kell legyen, ehhez megfelelő például az $x=\dfrac{1}{3}$ választás. Ebben az esetben feltételeink $b+d=3c$ és $6a=c$ alakban írhatók fel.

Ha például $a=1$, $c=6$, $b=8$ és $d=10$, akkor valóban létezik olyan trapéz, melynek alapjai 7 és 1, szárai 8 és 10 egység hosszúak, és az alapok távolságát $1:2$ arányban osztó egyenes a trapéz kerületét és területét is két egyenlő részre osztja. Tehát a feladat kérdésére a válasz nemleges.