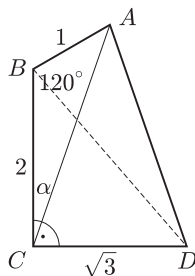


I. megoldás. Helyezzük el az $ABCD$ négyszöget a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a CD szakasz az x tengelyen legyen, a C pont pedig az origóban. Ekkor a B és D pontok koordinátái: $B(0; 2)$, $D(\sqrt{3}; 0)$. Az A pont vetülete az y tengelyen A' . Mivel $\angle ABA' = 60^\circ$, az ABA' háromszögből $AA' = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BA' = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ és így az A pont koordinátái: $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Az AD szakasz hossza:

$$AD = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}.$$

() Kocsis István (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)



II. megoldás. Az ABC háromszögből a koszinusztétel alkalmazásával meghatározhatjuk az AC átló hosszát:

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ.$$

Innen $AC = \sqrt{7}$. A BCD derékszögű háromszögben $DB^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$, innen $DB = \sqrt{7}$. Jelölje a BCA szöget α . A CAB háromszögben ugyancsak a koszinusztétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\cos \alpha = \frac{(\sqrt{7})^2 + 2^2 - 1}{2 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Végül az ADC háromszögből, ugyancsak a koszinusztétel alkalmazásával, megkapjuk a keresett AD oldal hosszát:

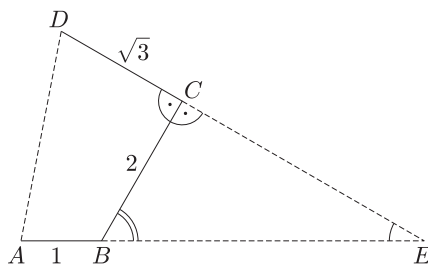
$$(1) \quad AD^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(90^\circ - \alpha).$$

Tudjuk, hogy $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, a négyzetes összefüggésből $\cos \alpha$ ismeretében kiszámíthatjuk $\sin \alpha$ értékét, felhasználva, hogy $\alpha < 90^\circ$:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{196}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{14},$$

ezt helyettesítve (1)-be, rendezés után kapjuk, hogy $AD = \sqrt{7}$.

III. megoldás. Hosszabbítsuk meg az AB és a CD oldalakat, az így kapott félegyenesek metszéspontja legyen E .



A BCE derékszögű háromszögben $\angle CBE = 60^\circ$, így $\angle BEC = 30^\circ$, $BE = 2BC = 4$, $CE = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$. Az AEB háromszögben $AE = 5$, $DE = 3\sqrt{3}$, $\angle AED = 30^\circ$. A koszinusztételt fölírva

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE \cdot \cos \angle AED = 25 + 27 - 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,$$

tehát $AD = \sqrt{7}$.

