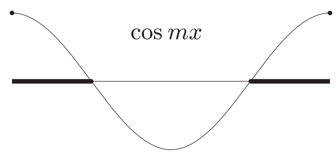
I. megoldás. A $\cos 2^k x$ függvények mindegyikének periódusa a 2π, így elegendő a megoldásokat a $[0;2\pi)$ intervallumon keresni. Másfelől

$$\cos 2^k x = \cos\left(2^k(2\pi - x)\right),$$

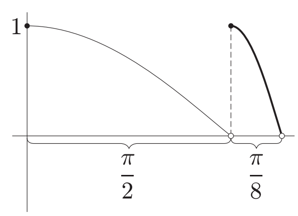
így föltehető, hogy $\alpha \in [0;\pi]$.

A keresett halmaz helyett vizsgáljuk annak komplementerét, legyen H a $[0;\pi]$ intervallum azon részhalmaza, amelynek x elemeire van olyan k, amelyre $\cos 2^k x > 0$. E halmaz meghatározásakor fölhasználjuk, hogy a $\cos mx$ függvény legkisebb periódusa $\frac{2\pi}{m}$. Hívjunk egy $\frac{2\pi}{m}$ hosszúságú intervallumot a $\cos mx$ függvény tiszta periódusának, ha az intervallum kezdőpontjában 1 a függvény értéke. Ekkor $\cos mx$ minden tiszta periódusának első és utolsó félig nyílt negyedében pozitív (*1. ábra*).



1. ábra

Így $\cos x > 0$, ha $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, ezért $\left[0;\frac{\pi}{2}\right) \subset H$. Vegyük észre, hogy ez az intervallum éppen a $\cos 4x$ függvény egy tiszta periódusa, emiatt az ehhez közvetlenül csatlakozó tiszta periódus alulról zárt első negyedén $\cos 4x$ pozitív (*2. ábra*): $\left[0;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \subset H$.



2. ábra

Így haladva a $H_k = \left[0;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}+\ldots+\frac{\pi}{2\cdot 4^k}\right) \subset H$ intervallumok sorozatát kapjuk. A k-adik lépést megelőző növekmények mindegyike egész számú többszöröse a $\cos 4^k x$ függvény periódusának, tehát a H_{k-1} intervallum végpontjában e függvény tiszta periódusa kezdődik. A k-adik lépésben tehát az intervallum ennek első negyedével, egy $\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{4^k}$ hosszúságú felülről nyílt szakasszal bővül.

A H_k intervallumok fölső végpontjai egy mértani sor részletösszegei, ennek első tagja $\frac{\pi}{2}$, hányadosa $\frac{1}{4}$, így a sor konvergens és az összege $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{3}$.

Ez azt jelenti, hogy ha $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$, akkor van olyan $k \ge 0$, amelyre $\cos 4^k x$ pozitív.

Hasonlóan kapjuk a 2 páratlan kitevőjű hatványaira a $\cos(2\cdot 4^k x)$ függvények egymáshoz csatlakozó tiszta periódusainak utolsó negyedét figyelembe véve, π végpontú intervallumok alulról bővülő sorozatát. A $\cos 2x$ periódusa π, tehát a függvény a $[0;\pi]$ tiszta periódus utolsó, alulról nyílt negyedében pozitív. Ennek az intervallumnak az alsó végpontja, $\pi-\frac{\pi}{4}$ a $\cos 8x$ egy tiszta periódusának a végpontja. Ennek a tiszta periódusnak az utolsó, $\frac{\pi}{16}$ hosszúságú negyedén tehát $\cos 8x$ pozitív. Így haladva a π végpontú intervallum hosszára adódó mértani sor első tagja $\frac{\pi}{4}$, hányadosa $\frac{1}{4}$, a sor összege az előbbi összeg fele, $\frac{\pi}{3}$. Ha tehát $\pi-\frac{\pi}{3} < x \le \pi$, akkor van olyan $k \ge 0$, amelyre $\cos(2\cdot 4^k x)$ pozitív.

Eszerint $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3};\pi\right] \subset H$, a $[0;\pi]$ egyetlen szóbajövő eleme $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Ekkor $\cos\alpha = -0{,}5$ és $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ miatt $\cos 2^n\alpha = \cos\alpha = -0{,}5$ minden pozitív egész n-re. Így a $[0;\pi]$ intervallumban $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, a $[0;2\pi)$ intervallumban ezen kívül $\alpha = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, a további megoldások pedig: $\frac{2\pi}{3}+2m\pi$, illetve $\frac{4\pi}{3}+2n\pi$, ahol n és m tetszőleges egész számok.

() *Tölgyesi Csaba* (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A helyes megoldások nagy része általában abból indult ki, hogy egy adott α szögre pontosan akkor teljesül a feltétel, ha minden $k \ge 0$ egészre van olyan m egész szám, hogy

$$(*) \qquad (2m+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le 2^k\alpha \le (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ha $k=0$, akkor ez a $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ feltételt jelenti, amit az előző megoldás szerint most is föltehető $0 \le \alpha < \pi$ korlát az $I_1 = \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ intervallumra szűkít. Innen 2α-ra egy π hosszúságú intervallumot kapunk: $\pi \le 2\alpha < 2\pi$. A $(*)$-beli π hosszúságú intervallumok közül ezzel pontosan egynek, az $m=0$ esetén adódó $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumnak nem üres a metszete. A két intervallum közös része $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$, így α-ra egy $\frac{\pi}{4}$ hosszúságú intervallum, az előző intervallum „alsó fele" adódik: $I_2 = \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right] = \left[\frac{2\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Ugyanígy haladhatunk tovább. Az α szögre a k-adik lépésben kapott

$$I_k = \left[\frac{n\pi}{2^k};\frac{(n+1)\pi}{2^k}\right]$$

intervallumot 2^k-szorosára nagyítva kapjuk, hogy $n\pi \le 2^k\alpha \le (n+1)\pi$. Ezt a $(*)$ intervallumok közül ismét pontosan egy metszi, a közös rész egy $\frac{\pi}{2}$ hosszúságú intervallum, amelyet 2^{k+1}-szeresére kicsinyítve kapjuk I_{k+1}-et, az előbbi I_k intervallum valamelyik felét. Hogy ez az alsó, vagy pedig a fölső, az attól függ, hogy n páratlan-e, vagy páros. A megoldáshoz azt kellett megmutatni, hogy ez lépésenként váltakozik – ez általában teljes indukcióval történt – és így az egymásba skatulyázott intervallumok közös részeként adódik $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. A következő megoldás elegánsan kerüli el a fenti bonyodalmakat.

II. megoldás. Keressük a $[0;2\pi)$-beli megoldásokat $\alpha = d\cdot 2\pi$ alakban, ahol $0 \le d < 1$. Ekkor $2\alpha = 2d\cdot 2\pi$, tehát $\cos 2\alpha = \cos\left(\{2d\}\cdot 2\pi\right)$ és általában, ha $d_k = \{2^k d\}$, akkor $\cos 2^k\alpha = \cos(d_k \cdot 2\pi)$. A törtrész definíciója szerint $d_k \cdot 2\pi$ éppen $2^k\alpha$ maradéka 2π-vel osztva.

Ha $0 \le \varphi < 2\pi$, akkor $\cos\varphi \le 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, ami a d_k együtthatókra nézve azt követeli meg, hogy

$$(1) \qquad \frac{1}{4} \le d_k \le \frac{3}{4}$$

teljesüljön minden $k \ge 0$ egész számra.

Maguk a d_k együtthatók természetes módon adódnak, ha a d kettes számrendszerbeli alakjából indulunk ki. Legyen $d = 0{,}x_1x_2x_3\ldots$ a d kettedes- vagy másképpen diadikus tört alakja. Az egyes jegyek értéke tehát 0 vagy 1. (A véges diadikus törteknek kétféle alakját is megengedjük, az adott helyiértéktől kezdődően azonosan nulla törteken kívül azokat is, amelyekben egy adott helyiértékkel kezdődően minden jegy 1-es.) Ekkor a 2-vel való szorzás eggyel jobbra lépteti a „kettedesvesszőt", $2d = x_1{,}x_2x_3\ldots$, az egész rész leválasztása pedig ezután törli az első jegyet: $\{2d\} = 0{,}x_2x_3x_4\ldots$. Kettes számrendszerben $\frac{1}{4} = 0{,}01$ és $\frac{3}{4} = 0{,}11$, tehát kettes számrendszerben (1) azt jelenti, hogy minden $k \ge 0$ egész számra teljesülnie kell, hogy

$$(2) \qquad 0{,}01 \le 0{,}x_kx_{k+1}x_{k+2}\ldots \le 0{,}11.$$

Azt állítjuk, hogy ez pontosan akkor igaz, ha d-nek nincsenek egyenlő szomszédos jegyei, bármely két szomszédos helyiértéken 01 vagy 10 áll.

Ha ugyanis $d = 0{,}x_1x_2x_3\ldots$ tartalmaz valahol két szomszédos 0-t, valamilyen k-ra $x_k = x_{k+1} = 0$, akkor $0{,}01 \le d_k = 0{,}00x_{k+2}x_{k+3}\ldots$ miatt a $(k+2)$-edik helyiértékkel kezdődően minden jegy 1-es és így $d_{k+2} = 0{,}111\ldots = 1 > \frac{3}{4}$.

Hasonlóan, két szomszédos 1-es $0{,}11x_{k+2}x_{k+3}\ldots = d_k \le 0{,}11$ miatt azt jelentené, hogy a $(k+2)$-edik helyiértékkel kezdődően minden jegy 0 és így $d_{k+2} = 0{,}000\ldots = 0 < \frac{1}{4}$.

A talált feltétel alapján d első jegye egyértelműen határozza meg a többit. Ha $x_1 = 0$, akkor $d' = 0{,}0101\ldots = 0{,}\overline{01} = \frac{1}{3}$, ha pedig $x_1 = 1$, akkor $d'' = 0{,}1010\ldots = 0{,}\overline{10} = \frac{2}{3}$.

Erre a két számra nyilvánvalóan teljesül (2), így a feladatnak két megoldása van a $[0;2\pi)$ intervallumon: $\alpha' = \frac{1}{3}\cdot 2\pi$ és $\alpha'' = \frac{2}{3}\cdot 2\pi$. A periodicitást figyelembe véve pedig $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, vagy pedig $\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$.

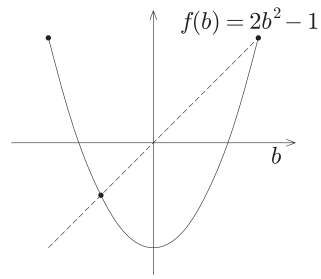
() *Bereczky Péter* (SZTE Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, 10. évf.)

III. megoldás. Ebben a megoldásban α helyett $\cos\alpha$ értékét határozzuk meg. Ismeretes, hogy $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, így ha $\cos\alpha = b$, akkor $\cos 2\alpha = 2b^2 - 1 = f(b)$.

Azokat a $b \in [-1;1]$ értékeket keressük, amelyekre a

$$(*) \qquad b_1 = b, \quad b_{k+1} = f(b_k)$$

sorozat elemei nem pozitívak.



3. ábra

Az f függvény a $[-1;1]$ intervallumot „kétszeresen” képezi le önmagára (*3. ábra*), két fixpontja van, $f(1) = 1$ és $f(-0{,}5) = -0{,}5$. Innen nyomban adódik, hogy ha $b_1 = -0{,}5$; akkor a b_k sorozat állandó és így minden tagja negatív, ez az érték tehát megfelelő. Azt állítjuk, hogy minden más kezdőértékre a $(*)$ sorozat tagjai között van pozitív szám. Legyen tehát $0 \ge b \ne -0{,}5$. Egyszerű algebrai átalakítással

$$(3) \qquad f(b) + 0{,}5 = 2(b^2 - 0{,}25) = (2b-1)(b+0{,}5).$$

Innen kiolvasható, hogy ha $b < 0$ és így $|2b-1| > 1$, akkor $\big|f(b) + 0{,}5\big| > |b + 0{,}5|$, a sorozat tagjai távolodnak $-0{,}5$-től. Ebből még általában nem következik, hogy a b_n sorozat feltétlenül kilép egy adott intervallumból. Ehhez olyan becslésre volna szükség, ahol a távolodás mértéke nem függ a b értékétől. Ilyen becslést kaphatunk, ha a sorozat három szomszédos tagját vesszük figyelembe.

Először is jegyezzük meg, hogy (3)-ból következik, hogy ha $0 \ge b \ne -0{,}5$; akkor $f(b)$ sem lehet $-0{,}5$. Most $(2b-1)$ negatív, ezért a nullától különböző $b + 0{,}5$ és $f(b) + 0{,}5$ értékek (3) szerint ellenkező előjelűek. Ha még $f(b) \le 0$ is teljesül, akkor mivel $-0{,}5$ elválasztja b-t és $f(b)$-t, $|2b-1|$ és $\big|2f(b) - 1\big|$ közül a nagyobbik legalább 1,5. Mivel a kisebbik is legalább 1, azért

$$\big(2f(b) - 1\big)(2b-1) \ge (0-1)(-0{,}5-1) = 1{,}5.$$

Írjunk (3)-ban b helyére $f(b)$-t, majd használjuk fel ismét (3)-at:

$$(4) \qquad f\big(f(b)\big) + 0{,}5 = \big(2f(b) - 1\big)\big(f(b) + 0{,}5\big) = \big(2f(b) - 1\big)(2b-1)(b+0{,}5).$$

A fentiek szerint ha $0 \ge b \ne -0{,}5$ és $f(b) \le 0$, akkor

$$\big|f\big(f(b)\big) + 0{,}5\big| \ge 1{,}5 \cdot |b + 0{,}5|.$$

Azt kaptuk, hogy ha $b_1 \ne -0{,}5$; akkor ameddig a b_k sorozat elemei nem pozitívak, addig egyikük sem lehet $-0{,}5$; másrészt b_{k+2} legalább másfélszer olyan messze van $-0{,}5$-től, mint b_k. Ha tehát $b_1 \ne -0{,}5$; akkor a b_k sorozat elemei nem lehetnek valamennyien a $[-1;0]$ intervallumban. Mivel pedig tetszőleges $b_1 \in [-1;1]$ kezdőértékre a sorozat minden eleme a $[-1;1]$ intervallumban van, azért a sorozatnak ilyenkor van pozitív eleme.

Végül ha $b_1 = \cos\alpha = -0{,}5$; akkor $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$, ahol n tetszőleges egész szám.

() *Hubai Tamás* (Budapest, Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.) dolgozata nyomán