Megoldás. Jelölje a sorozat első elemét a, hányadosát q, tagjainak számát pedig n. A q nem lehet 1, mert akkor $an = 11$, $a^2n = 341$ miatt $a = 31$, $n = \frac{11}{31}$ lenne, ami nem egész. Így a következő összefüggéseket írhatjuk föl:

$$a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 11, \tag{1}$$

$$a^2 \cdot \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = 341, \tag{2}$$

$$a^3 \cdot \frac{q^{3n} - 1}{q^3 - 1} = 3641. \tag{3}$$

A második egyenletet az első négyzetével elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{(q^n + 1)(q - 1)}{(q^n - 1)(q + 1)} = \frac{31}{11}.$$

Ebből $q^n = \frac{21q + 10}{10q + 21}$. Ezt (1)-be helyettesítve $a = 10q + 21$ adódik.

A q^n-re és a-ra kapott összefüggéseket (3)-ba beírva, és használva az

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

azonosságot:

$$(10q + 21)^3 \frac{\left(\frac{21q+10}{10q+21}\right)^3 - 1}{q^3 - 1} = 3641,$$

$$\frac{(21q + 10)^3 - (10q + 21)^3}{q^3 - 1} = 3641,$$

$$\frac{(11q - 11)\big((21q + 10)^2 + (21q + 10)(10q + 21) + (10q + 21)^2\big)}{(q - 1)(q^2 + q + 1)} = 11 \cdot 331;$$

egyszerűsíthetünk $q - 1 \neq 0$-val, végül 11-gyel történő leosztás, majd rendezés után a $2q^2 + 5q + 2 = 0$ egyenlethez jutunk. Ebből q lehetséges értékeire $q = -2$, illetve $q = -\frac{1}{2}$ adódik. (Ez nem meglepő, hiszen ha egy sorozat egy bizonyos q-val mint hányadossal megoldás, akkor ugyanez a sorozat fordított sorrendben és $\frac{1}{q}$ hányadossal szintén megoldás.) Kapjuk, hogy $a_1 = 1$, $n_1 = 5$, illetve $a_2 = 16$, $n_2 = 5$.

A feladat megoldása tehát a következő két 5-tagú sorozat (melyekről könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban kielégítik a feltételeket): 1, -2, 4, -8, 16, illetve 16, -8, 4, -2, 1.

() *Pongrácz András* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján