Megoldás. Jelölje a sorozat első elemét a, hányadosát q, tagjainak számát pedig n. A q nem lehet 1, mert akkor $an=11$, $a^2n=341$ miatt $a=31$, $n=\frac{11}{31}$ lenne, ami nem egész. Így a következő összefüggéseket írhatjuk föl:

$$a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=11, \tag{1}$$

$$a^2\cdot\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}=341, \tag{2}$$

$$a^3\cdot\frac{q^{3n}-1}{q^3-1}=3641. \tag{3}$$

A második egyenletet az első négyzetével elosztva kapjuk, hogy

$$\frac{(q^n+1)(q-1)}{(q^n-1)(q+1)}=\frac{31}{11}.$$

Ebből $q^n=\frac{21q+10}{10q+21}$. Ezt (1)-be helyettesítve $a=10q+21$ adódik.

A q^n-re és a-ra kapott összefüggéseket (3)-ba beírva, és használva az

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

azonosságot:

$$(10q+21)^3\frac{\left(\frac{21q+10}{10q+21}\right)^3-1}{q^3-1}=3641,$$
$$\frac{(21q+10)^3-(10q+21)^3}{q^3-1}=3641,$$
$$\frac{(11q-11)\big((21q+10)^2+(21q+10)(10q+21)+(10q+21)^2\big)}{(q-1)(q^2+q+1)}=11\cdot 331;$$

egyszerűsíthetünk $q-1\neq 0$-val, végül 11-gyel történő leosztás, majd rendezés után a $2q^2+5q+2=0$ egyenlethez jutunk. Ebből q lehetséges értékeire $q=-2$, illetve $q=-\frac{1}{2}$ adódik. (Ez nem meglepő, hiszen ha egy sorozat egy bizonyos q-val mint hányadossal megoldás, akkor ugyanez a sorozat fordított sorrendben és $\frac{1}{q}$ hányadossal szintén megoldás.) Kapjuk, hogy $a_1=1$, $n_1=5$, illetve $a_2=16$, $n_2=5$.

A feladat megoldása tehát a következő két 5-tagú sorozat (melyekről könnyen ellenőrizhetjük, hogy valóban kielégítik a feltételeket): 1, -2, 4, -8, 16, illetve 16, -8, 4, -2, 1.

() *Pongrácz András* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján