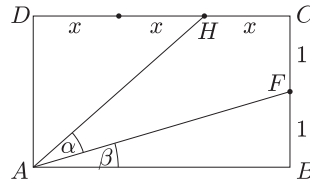


**I. megoldás.** Hasonló téglalapokban a  $HAF$  szög egyenlő. Rögzítsük a  $BC$  oldalt és változtassuk az  $AB$  oldalt, így a sík minden téglalapjához találunk hasonló  $e$  téglalapok között. Legyen a  $BC$  szakasz hossza 2, az  $AB$  szakaszé  $3x$ . Ekkor a  $\beta = FAB$  szög tangense:  $\tan \beta = \frac{1}{3x}$ , és az  $\alpha + \beta = HAB$  szög tangense:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$



Felhasználva a  $\tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) - \beta)$ -ra vonatkozó addíciós képletet:

$$\tan((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3x}}{1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3x + \frac{1}{x}}.$$

A kifejezés nevezőjében „majdnem” egy szám és a reciprokának az összege található.  $\sqrt{3}$ -mal osztva a számlálót és a nevezőt a következő adódik:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

A tört nevezője itt már egy pozitív számnak és a reciprokának az összege, ezért ennek az értékkészlete a  $[2, \infty)$  intervallum. Így a tört értéke, tehát a  $HAF$  szög tangensének értéke a  $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  intervallum bármelyik eleme lehet.

Mivel hegyesszögekre a tangens függvény monoton növekedő, a  $HAF$  szög 0 és  $\frac{\pi}{6}$  között bármely értéket fölvehet.

Maximális értéke  $\frac{\pi}{6}$ .

()

Fejes Livia (Fonyód, Mátyás Király Gimnázium, 11. o.t.)

**II. megoldás.** Rögzítsük a  $D$  és  $C$  pontokat, és jelölje  $D'$  és  $H'$  a  $D$  és  $H$  tükörképét  $C$ -re. Mivel  $D'$  az  $AF$  egyenesen van, azért a  $HAD'$  szög egyenlő a  $HAF$  szöggel. Képzeljük el, hogy a  $HAF$  szög  $\gamma$  nagysága adott, és vizsgáljuk az  $A$  pont helyzetét. Az  $A$  pont egyrészt a  $D$ -ben  $DC$ -re emelt merőlegesen helyezkedik el, másrészt egy olyan  $\gamma$  szögű látóöríven, melynek két végpontja éppen  $H$  és  $D'$ , a kör középpontja pedig a  $CD$  egyenesre  $H'$ -ben emelt merőlegesre esik. A kör sugara ezért legalább  $HD' = DH'$ ; ha éppen ennyi, akkor a  $HD'$  szakaszhoz tartozó középponti szög  $\frac{\pi}{3}$ , azaz  $\gamma = \frac{\pi}{6}$ . Ha a kör sugarát növeljük, akkor  $\gamma$  értéke csökken, és minden esetben az  $A$  pont megszerkeszthető. Tehát a  $HAF$  szög nagysága tetszőleges,  $\frac{\pi}{6}$ -nál nem nagyobb pozitív érték lehet.

