

**Megoldás.** Legyen  $p = 0,2499$  és legyen  $1 < r < \frac{1}{4p}$ . A feltételek szerint létezik olyan elég nagy  $n_0$  pozitív egész, hogy  $n \geq n_0$  esetén  $na_n < p$ . Ha  $n_0$ -t elég nagyoknak választjuk, akkor az is teljesül, hogy  $\frac{n}{n-2} < r$ . Tetszőleges  $N \geq n_0$  egész számra legyen  $S(N) = \sup \{na_n : n \geq N\}$ . Az  $n_0$  választása szerint például  $S(n_0) \leq p$ . Ha  $N \geq n_0$  és  $n \geq 2N$ , akkor

$$\begin{aligned} na_n &= n \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \leq n \sum_{k=n}^{\infty} a_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} a_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil} \leq n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{S(N)}{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \cdot \frac{S(N)}{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil} < \\ &< n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{S^2(N)}{\frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-1}{2}} = 4nS^2(N) \sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) = \frac{4nS^2(N)}{n-2} < 4rS^2(N). \end{aligned}$$

Ez minden  $n \geq 2N$ -re igaz, így  $S(2N) = \sup \{na_n : n \geq 2N\} \leq 4rS^2(N)$ , vagy másképpen  $4rS(2N) \leq (4rS(N))^2$ . Ezt  $m$ -szer alkalmazva,

$$S(2^m N) < 4rS(2^m N) \leq (4rS(2^{m-1}N))^2 \leq (4rS(2^{m-2}N))^4 \leq \dots \leq (4rS(N))^{2^m}.$$

Legyen most  $n > n_0$  tetszőleges pozitív egész. Válasszuk meg az  $m$  nemnegatív egészt úgy, hogy  $2^m n_0 \leq n < 2^{m+1} n_0$  teljesüljön. Ekkor

$$a_n \leq \frac{S(2^m n_0)}{n} < (4rS(n_0))^{2^m} \leq (4rp)^{2^m} < (4rp)^{n/(2n_0)} = \left( \sqrt[2n_0]{4rp} \right)^n.$$

(Az  $r$  választása szerint  $4rp < 1$ , az  $m$  választása szerint pedig  $2^m > \frac{n}{2n_0}$ .)

Legyen  $q = \sqrt[2n_0]{4rp}$ . Mint láttuk,  $n > n_0$  esetén  $a_n < q^n$ . A  $4rp < 1$  egyenlőtlenségből az is következik, hogy  $q < 1$ . A  $q$  szám tehát megfelel a feladat feltételeinek.

*Megjegyzés.* A  $p = 0,2499$  szám helyére bármilyen  $\frac{1}{4}$ -nél kisebb számot írhatunk, a megoldás ugyanígy elmondható. Az állítás  $p = \frac{1}{4}$  esetén viszont már nem igaz. Például az  $a_n = \frac{1}{4n+1}$  sorozatra teljesül az (1) egyenlőtlenség, tetszőleges  $n$  esetén  $na_n < \frac{1}{4}$ , de a sorozat nem becsülhető felülől semmilyen 1-nél kisebb hányadosú mértani sorozattal.