Megoldás. Legyen $p = 0{,}2499$ és legyen $1 < r < \dfrac{1}{4p}$. A feltételek szerint létezik olyan elég nagy n_0 pozitív egész, hogy $n \geq n_0$ esetén $na_n < p$. Ha n_0-t elég nagynak választjuk, akkor az is teljesül, hogy $\dfrac{n}{n-2} < r$.

Tetszőleges $N \geq n_0$ egész számra legyen $S(N) = \sup\{na_n \colon n \geq N\}$. Az n_0 választása szerint például $S(n_0) \leq p$. Ha $N \geq n_0$ és $n \geq 2N$, akkor

$$na_n = n\sum_{k=n}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) \leq n\sum_{k=n}^{\infty} a_{\left[\frac{k}{2}\right]} a_{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \leq n\sum_{k=n}^{\infty} \frac{S(N)}{\left[\frac{k}{2}\right]} \cdot \frac{S(N)}{\left[\frac{k+1}{2}\right]} <$$
$$< n\sum_{k=n}^{\infty} \frac{S^2(N)}{\frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-1}{2}} = 4nS^2(N)\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{4nS^2(N)}{n-2} < 4rS^2(N).$$

Ez minden $n \geq 2N$-re igaz, így $S(2N) = \sup\{na_n \colon n \geq 2N\} \leq 4rS^2(N)$, vagy másképpen $4rS(2N) \leq \big(4rS(N)\big)^2$. Ezt m-szer alkalmazva,

$$S(2^m N) < 4rS(2^m N) \leq \big(4rS(2^{m-1}N)\big)^2 \leq \big(4rS(2^{m-2}N)\big)^4 \leq \cdots \leq \big(4rS(N)\big)^{2^m}.$$

Legyen most $n > n_0$ tetszőleges pozitív egész. Válasszuk meg az m nemnegatív egészt úgy, hogy $2^m n_0 \leq n < 2^{m+1}n_0$ teljesüljön. Ekkor

$$a_n \leq \frac{S(2^m n_0)}{n} < \big(4rS(n_0)\big)^{2^m} \leq (4rp)^{2^m} < (4rp)^{n/(2n_0)} = \left(\sqrt[2n_0]{4rp}\right)^n.$$

(Az r választása szerint $4rp < 1$, az m választása szerint pedig $2^m > \dfrac{n}{2n_0}$.)

Legyen $q = \sqrt[2n_0]{4rp}$. Mint láttuk, $n > n_0$ esetén $a_n < q^n$. A $4rp < 1$ egyenlőtlenségből az is következik, hogy $q < 1$. A q szám tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Megjegyzés. A $p = 0{,}2499$ szám helyére bármilyen $\dfrac{1}{4}$-nél kisebb számot írhatunk, a megoldás ugyanígy elmondható. Az állítás $p = \dfrac{1}{4}$ esetén viszont már nem igaz. Például az $a_n = \dfrac{1}{4n+1}$ sorozatra teljesül az (1) egyenlőtlenség, tetszőleges n esetén $na_n < \dfrac{1}{4}$, de a sorozat nem becsülhető felülről semmilyen 1-nél kisebb hányadosú mértani sorozattal.