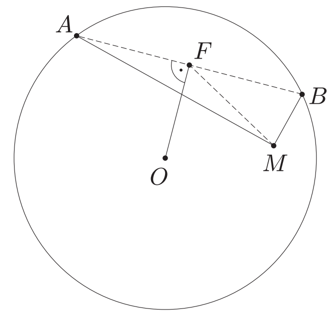
I. megoldás. Jelölje H a keresett ponthalmazt, O a kör középpontját, r pedig a sugarát. Ha $F \in H$, akkor OF merőleges az AB húrra, így Pitagorasz tétele szerint $OF^2 + AF^2 = OA^2 = r^2$ (*1. ábra*). A derékszögű AMB háromszögben F az átfogó felezőpontja, ezért $AF = FM$, és így

$$OF^2 + FM^2 = r^2. \tag{1}$$

Állítjuk, hogy a talált feltétel elégséges: ha a sík egy adott F pontjára teljesül (1), akkor $F \in H$. Először is megmutatjuk, hogy ekkor F a kör középpontjától különböző belső pont, azaz $0 < OF < r$. (1) miatt nyilván $0 \le OF \le r$. Ha itt $OF = 0$, azaz $O = F$, akkor $FM = OM = r$, ami nem lehet, hiszen az M belső pont. Hasonlóan, ha $OF = r$, akkor $FM = 0$, F és M esnek egybe és ismét $OM = r$ adódik.

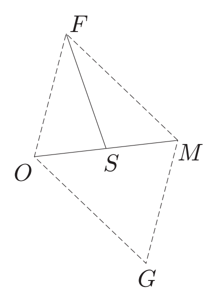


1. ábra

Létezik tehát az OF-re F-ben merőleges egyenes és két pontban metszi a kört. Ha ez a szelő az AB húr, akkor az F pont felezi, így a Pitagorasz-tételből $AF^2 = r^2 - OF^2$, ami (1) szerint éppen FM^2. Így $FA = FM = FB$, és mivel A, B és M különböző pontok, a létrejövő AMB háromszögben az M csúcsnál valóban derékszög van.

Azt kell tehát tisztáznunk, hogy mi azoknak az F pontoknak a mértani helye, amelyekre (1) teljesül, azaz amelyek két adott ponttól mért távolságának négyzetösszege állandó. Ezt megtehetnénk koordinátageometriai eszközökkel, azonban egy hasznos eredmény, az úgynevezett paralelogramma-tétel gyors befejezést tesz lehetővé.

Tétel. *Egy paralelogrammában az oldalak négyzetösszege az átlók négyzetösszegével egyenlő.* (A tétel a *Geometriai feladatok gyűjteménye* II. 289. feladata.)



2. ábra

Tükrözzük az OFM háromszöget az OM szakasz S felezőpontjára (*2. ábra*). Így az $OFMG$ paralelogrammát kapjuk. Ha $OM = d$, akkor a paralelogramma-tétel szerint a sík tetszőleges F pontjára

$$2(OF^2 + FM^2) = OM^2 + FG^2 = d^2 + 4FS^2.$$

Rendezés után

$$FS^2 = \frac{1}{4}\big(2(OF^2 + FM^2) - d^2\big), \tag{2}$$

tehát (1) pontosan akkor teljesül az F pontra, ha $FS^2 = \dfrac{1}{4}(2r^2 - d^2)$. Ez pedig akkor és csak akkor igaz, ha F az S középpontú, $\dfrac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$ sugarú körön van.

Mivel minden egyes lépésben szükséges és elégséges feltételt adtunk meg, a keresett mértani hely egy kör, amelynek középpontja az OM szakasz felezőpontja, sugara pedig $\dfrac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$.

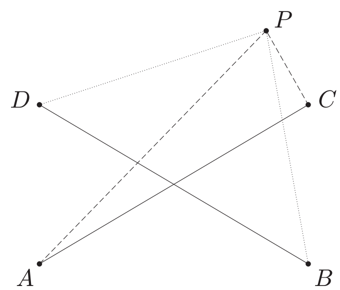
() *Backhausz Ágnes* (Budapest, Fazekas Mihály Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Ha adottak a síkon az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok és egy P_0 pont, akkor akár a paralelogrammatétel ismételt alkalmazásával, akár koordinátageometriai eszközökkel egyszerűen igazolható, hogy azon P pontok mértani helye, amelyekre

$$A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2 = A_1P_0^2 + A_2P_0^2 + \cdots + A_nP_0^2$$

egy olyan kör, amelynek a középpontja az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontrendszer S súlypontja és a kör átmegy a P_0 ponton. Ha pedig azt kérdezzük, hogy mi azon P pontok mértani helye, amelyekre az $A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2$ négyzetösszeg állandó, akkor a válasz ennek az állandónak az értékétől függően egy S középpontú kör, az S pont, vagy pedig üres halmaz.

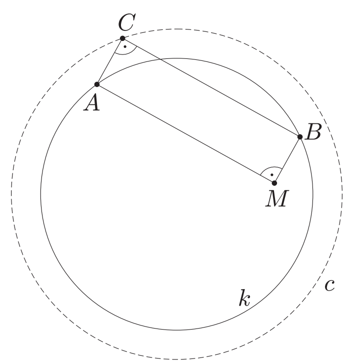
II. megoldás. A megoldásban felhasználjuk az alábbi segédtételt:
Ha az $ABCD$ négyszög téglalap, akkor a sík – valójában a tér – tetszőleges P pontjára $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ (3. ábra).



3. ábra

Ez az állítás az I. megoldásban kimondott paralelogramma-tételből következik. Annak (2) alakja szerint ugyanis egy pontot egy szakasz két végpontjával összekötő szakaszok négyzetösszege kizárólag a szakasz hosszától és a pontnak a szakasz felezőpontjától mért távolságától függ. Mivel egy téglalap átlói egyenlő hosszúak, a felezőpontjuk pedig egybeesik, az állítás valóban igaz.

Tekintsük most az M csúcsú derékszög egy adott helyzetét, és egészítsük ki az AMB háromszöget téglalappá (*4. ábra*). Legyen ennek a téglalapnak a negyedik csúcsa C.



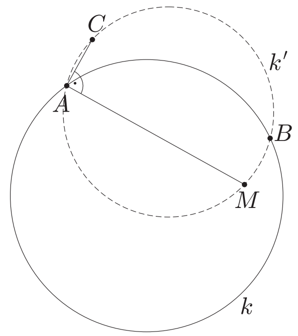
4. ábra

Ekkor a fenti állítást az adott – és a továbbiakban k-val jelölt – kör O középpontjára és erre a téglalapra alkalmazva $OM^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2 = 2r^2$. Ez azt jelenti, hogy a derékszöggel együtt forgó C pont állandó távolságra van a k kör O középpontjától:

$$OC^2 = 2r^2 - d^2. \tag{3}$$

(Az előző megoldás szerint az OM szakasz hossza d.)

Megmutatjuk, hogy az így adódó, k-val koncentrikus c kör minden C pontjához van az M körül forgó derékszögnek olyan helyzete, hogy a *4. ábra* szerint kapott téglalap negyedik csúcsa éppen C. Próbáljuk ehhez megszerkeszteni a megfelelő téglalapot.

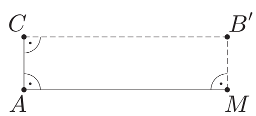


5. ábra

Mivel $d < r$, azért (3)-ból $OC > r$ adódik, a C tehát külső pontja a k körnek. A feltétel szerint viszont az M belső pont, így pedig az MC átmérőjű k' kör két pontban metszi k-t. Legyenek ezek A és B. (*5. ábra*). Meg kell mutatnunk, hogy az így szerkesztett $CAMB$ négyszög valóban téglalap.

Thalész tétele szerint $CAM\sphericalangle = 90°$, van tehát olyan B' pont, amelyre a $CAMB'$ négyszög téglalap (*6. ábra*). Ennek a körülírt köre a CAM háromszög körülírt köre, azaz k'. A megoldás elején kimondott állítást most erre a $CAMB'$ téglalapra és az O pontra alkalmazva (3) felhasználásával kapjuk, hogy

$$OB'^2 = OC^2 + OM^2 - OA^2 = \left(2r^2 - d^2\right) + d^2 - r^2 = r^2.$$



6. ábra

A B' pont tehát a k körön is rajta van, és így nem más, mint a k és k' körök A-tól különböző metszéspontja, a B pont. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a $CAMB$ négyszög azonos a $CAMB'$ téglalappal.

A C pontok mértani helye tehát az O középpontú, $\sqrt{2r^2 - d^2}$ sugarú c kör. Mivel F a szóban forgó téglalap AB átlójának a felezőpontja, azért felezi az MC átlót is. A keresett ponthalmaz tehát az MC szakaszok felezőpontjainak a mértani helye, miközben a C pont befutja a c kört: éppen a c körnek az M pontból felére kicsinyített képe. Az F pontok mértani helye tehát egy $\dfrac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}$ sugarú kör, melynek középpontja az OM szakasz felezőpontja.

() *Pongrácz András* (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 11. évf.) ötlete alapján