

Megoldás. A feladat egyenlőtlenségében x helyére 3-at és y helyére 2-t írva teljesülnie kell, hogy $t \cdot 12 \geq \sqrt{6}$, és így t értéke legalább $\frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség minden ilyen t értékre teljesül, ha x és y nemnegatív számok.

A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget a feltétel szerint nemnegatív $2x$ és $3y$ értékekre felírva

$$2x + 3y \geq 2\sqrt{2x \cdot 3y} = 2\sqrt{6}\sqrt{xy}.$$

Ha $t \geq 0$, akkor t -vel szorozva

$$(1) \quad t(2x + 3y) \geq t \cdot 2\sqrt{6}\sqrt{xy}.$$

Ha $t \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}$, azaz $t \cdot 2\sqrt{6} \geq 1$, akkor (1) jobb oldala nagyobb, vagy egyenlő, mint $\sqrt{xy}$, igaz tehát a szóban forgó egyenlőtlenség.

A vizsgált egyenlőtlenség tehát pontosan akkor teljesül minden nemnegatív x, y valós számra, ha t legalább $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

() *Kalcsú Áron* (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldások lényegében a fenti utat követték. Az első lépésben persze minden olyan helyettesítés megfelel, amikor egyenlőség van a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben, azaz $2x = 3y$. Valamit egyszerűsödik a feladat szerkezete, ha úgy rendezzük át, hogy ne függjön mindkét oldal a változóktól, azaz például

$$A(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{2x + 3y} \leq t$$

alakban vizsgáljuk. (Eközben persze ki kell zárunk az $x = y = 0$ esetet, de ez nyilván nem jelent megszorítást a t -re.) Innen jobban látszik, hogy valójában az $A(x, y)$ függvény legkisebb felső korlátját keressük. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint az $A(x, y)$ függvénynek létezik maximális értéke, és az éppen $\frac{1}{2\sqrt{6}}$, a feladat megoldása.