Megoldás. Az állítás semmitmondó egyenlőségbe megy át, ha $n = 1$; tegyük föl, hogy $n > 1$. Ekkor a fenti összeg $(n-1)$ csoportra osztható, ezeket egy-egy nulla értékű tag, $\left\{\sqrt{m^2}\right\} = \{m\}$ választja szét. Az m-edik csoport egy $2m$ tagú összeg,

$$S_m = \left\{\sqrt{m^2+1}\right\} + \left\{\sqrt{m^2+2}\right\} + \cdots + \left\{\sqrt{m^2+2m}\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

A feladat $\sum_{m=1}^{n-1} S_m$ becslését kívánja, a megoldáshoz az S_m összegek tagjait becsüljük két oldalról: megmutatjuk, hogy ha $1 \le k \le 2m$, akkor

$$\frac{k}{2m+1} < a_{m,k} = \left\{\sqrt{m^2+k}\right\} < \frac{k}{2m}. \tag{1}$$

Használjuk fel, hogy minden valós számra $\{x\} = x - [x]$. Ha $1 \le k \le 2m$, akkor $m^2 < m^2+k < m^2+2m+1 = (m+1)^2$, és így $\left[\sqrt{m^2+k}\right] = m$. Így

$$a_{m,k} = \sqrt{m^2+k} - \left[\sqrt{m^2+k}\right] = \sqrt{m^2+k} - m.$$

„Gyöktelenítsük” ezt az alakot, bővítsünk a konjugáltjával:

$$a_{m,k} = \frac{m^2+k-m^2}{\sqrt{m^2+k}+m} = \frac{k}{\sqrt{m^2+k}+m}.$$

Innen valóban következik (1), hiszen most $m < \sqrt{m^2+k} < m+1$.

A bizonyítandó egyenlőtlenségek most már a kapott becslések összegzésével adódnak:

$$S_m > \sum_{k=1}^{2m} \frac{k}{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{2m(2m+1)}{2} = m, \quad \text{illetve}$$
$$S_m < \sum_{k=1}^{2m} \frac{k}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{2m(2m+1)}{2} = m + \frac{1}{2}.$$

Így

$$\sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{n(n-1)}{2} < \sum_{m=1}^{n-1} S_m < \sum_{m=1}^{n-1} \left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n-1)+n-1}{2} = \frac{n^2-1}{2},$$

a bizonyítandó állítást kapjuk.

() *Tóth János* (Békéscsaba, Rózsa Ferenc Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldások vagy a $\frac{k}{2m+1} < a_{m,k} = \left\{\sqrt{m^2+k}\right\} < \frac{k}{2m}$ egyenlőtlenségeket, vagy pedig az összegzésükkel adódó $m < S_m < m + \frac{1}{2}$ becsléseket igazolták a legkülönbözőbb módszerekkel. Az $m < S_m$ alsó becslést nem csak tagonként összegezve kaphatjuk meg, könnyen igazolható a számtani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is, illetve a $2m$ tagú S_m összeg tagjait szimmetrikusan csoportosítva az $1 \le k \le m$ esetben teljesülő $1 < \left\{\sqrt{m^2+k}\right\} + \left\{\sqrt{(m+1)^2-k}\right\}$ egyenlőtlenségek összegzésével is.

A felső becslésre kényegében csak ezt a módszert találták. Valamivel finomabb eszközökkel az $S_m < m + \frac{1}{6}$ eredmény is igazolható.