

Megoldás. A feladat szövege sajnos nem egyértelmű. A szövegből nem derül ki, hogy az egyes lépéseknél hogyan dönt Anna. Ha a szorzást és az összeadást tetszés szerint választja, akkor pl. a 33 333 ötjegyű szám esetén először a jegyeket összeszorozva 243-at kap, ha ismét szorozna, akkor páros számot kapna, de ha meggondolta magát, és most összeadja a jegyeket, akkor az eredmény 9, s ez megfelelő. Ugyanígy kétjegyű szám, pl. 35 esetén, ha mindig szoroz, akkor az eredmény páratlan lesz, de az összegre ez már nem igaz.

Az egyik értelmezés szerint a feladat úgy hangzik, hogy egy kiinduló szám akkor megfelelő, ha *mind* a számjegyek szorzata, *mind* az összege mindig páratlan.

Vizsgáljuk meg, hogy melyek ezek a számok. Ahhoz, hogy egy szám jegyeinek szorzata páratlan legyen, az kell, hogy minden jegye páratlan legyen. A számjegyek összege pedig csak akkor lehet páratlan, ha a szám páratlan sok jegyből áll. Ebből következik, hogy a kiindulási szám nem lehet 2-, 4-, vagy 6-jegyű. Elegendő tehát az 1-, 3- és 5-jegyű számokat vizsgálni.

Egyjegyű páratlan szám 5 darab van.

Háromjegyű számok számjegyeinek szorzata és összege csak akkor lesz egyaránt megfelelő, ha számjegyeinek sem a szorzata, sem pedig az összege nem kétjegyű szám, azaz legfeljebb 9. A megfelelő számok a következők: 111, 113, 131, 311, 331, 313, 133, 115, 151, 511, 117, 171, 711. Ebből tehát 13 darab van.

Végül az ötjegyűek esetén a számjegyek összege ugyancsak legfeljebb 9, azaz nincs 5-nél nagyobb jegye a kiinduló számnak. A lehetséges számok:

- 5 darab 1-es; ez 1 lehetőség.
- 4 darab 1-es és 1 db 3-as; ilyen szám 5 van aszerint, hogy a 3-as jegy hol áll.
- 4 darab 1-es és 1 db 5-ös; ebből is 5 van.
- Végül 3 darab 1-es és 2 db 3-as; ilyen szám 10 van.

Az összes lehetőségek száma: $5 + 13 + 1 + 5 + 5 + 10 = 39$. Tehát 39 olyan legfeljebb hatjegyű szám van, amelyek jegyeit összeszorozva, illetőleg összeadva – s ezt folytatva addig, míg egyjegyű számhoz jutunk –, mindig páratlan szám lesz az eredmény.

A második értelmezés szerint, – amikor hol a szorzattal, hol az összeggel folytatta Anna a felírást, – már sokkal nehezebb összeszámolni az összes lehetőséget.

Egy számból kiindulva, akkor nem tudjuk folytatni a felírást, ha a kiinduló (vagy a később kapott) szám esetén mind a számjegyek szorzata, mind a számjegyek összege páros, vagy már maga a szám is páros.

Ezek összeszámlálását mutatta be *Szilágyi Péter* (Debrecen, Kossuth L. Gimn., 11. évf.). Ezt közöljük most:

Egy páratlan szám akkor lehet kiinduló szám, ha vagy minden jegye páratlan, vagy a páratlan sok páratlan számjegye mellett van páros jegye. Ez utóbbi esetben csak a jegyek összeadásával lehet folytatni a sort. (Például 3257 esetén az összeg 17, ezután a szorzat 7.)

Az egyjegyű számok közül most is a páratlanok a jók, ezek száma 5. A kétjegyű számok közül pedig a páratlanok mind jók, hiszen vagy a számjegyek összege, vagy a számjegyek szorzata biztosan páratlan és legfeljebb kétjegyű lesz. Ilyen szám 45 van.

A háromjegyű számok közül azok a megfelelők, amelyeknek vagy mindhárom jegye páratlan, vagy egy páratlan jegy mellett van két páros jegyük. Ekkor a számjegyek összeadásával legfeljebb kétjegyű páratlan számot kapunk, amelyek az előbbiek szerint megfelelőek. Ez az összes páratlan háromjegyű számoknak a fele, azaz 225 darab.

Hasonlóan, az ötjegyű kezdőszámok közül azok a megfelelők, amelyekben 1, 3, vagy 5 jegy páratlan, a többi páros. Ezek száma az összes páratlan ötjegyű számok számának a fele, azaz 22 500 darab.

A négyjegyű számok közül egyrészt azok jók, amelyekben 1 vagy 3 jegy páratlan, a többi páros. Ez az összes négyjegyű páratlan szám fele, azaz 2250 darab. Ezen kívül 625 olyan négyjegyű szám van, amelynek minden jegye páratlan, de ezek nem mindegyike felel meg. Hasonló a helyzet azon hatjegyű számok esetén, amelyekben 1, 3, vagy 5 jegy páratlan, ezek száma 225 000; a csupa páratlan jegyű hatjegyű számok száma $5^6 = 15\,625$, amelyek között ugyancsak előfordulnak nem megfelelők. A nem megfelelő 4- és 6-jegyű számokat – tekintettel nagy számukra – egy számítógépes program segítségével szűrte ki a megoldó. Végül a következő eredményre jutott:

1 jegyű szám	5 db van
2 jegyű szám	45 db van
3 jegyű szám	225 db van
4 jegyű szám	2 682 db van
5 jegyű szám	22 500 db van
6 jegyű szám	232 739 db van
összesen:	258 196.