

I. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az A csúcs legyen az origó, az x , y , z tengelyek illeszkedjenek rendre a B , D , E pontokra, az egységet pedig válasszuk a kocka élhossza egytizedének. Ekkor az egyes pontok koordinátái: $B(10; 0; 0)$, $D(0; 10; 0)$, $M(5; 5; 0)$, $E(0; 0; 10)$.

A P pont pontosan akkor van rajta az AB , a Q pont pedig az EM egyenesen, ha léteznek olyan t , illetve s valós számok, melyekre

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \text{illetve} \quad \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + s \cdot \overrightarrow{EM}.$$

Tehát a P és Q pontok koordinátái a t és s paraméterek segítségével kifejezve: $P(10t; 0; 0)$, $Q(5s; 5s; 10 - 10s)$. Tehát

$$PQ^2 = (10t - 5s)^2 + (5s)^2 + (10 - 10s)^2.$$

Ismert, hogy a két egyenes távolsága megegyezik a PQ távolságok minimumával. Rögzített s érték esetén PQ nyilván akkor a legkisebb, ha $10t = 5s$, azaz ha $t = s/2$. Ebben az esetben

$$PQ^2 = (5s)^2 + (10 - 10s)^2 = (5\sqrt{5}s - 4\sqrt{5})^2 + 20.$$

Ez a kifejezés akkor minimális, ha $s = 0,8$, vagyis a PQ távolság akkor a legkisebb, ha $s = 0,8$ és $t = 0,4$. Ekkor a P , illetve a Q pont koordinátái: $P(4; 0; 0)$, $Q(4; 4; 2)$.

A P pont tehát az a pont, amely az AB szakaszt $2 : 3$ arányban osztja, Q pedig az ME szakaszt $1 : 4$ arányban osztó pont.

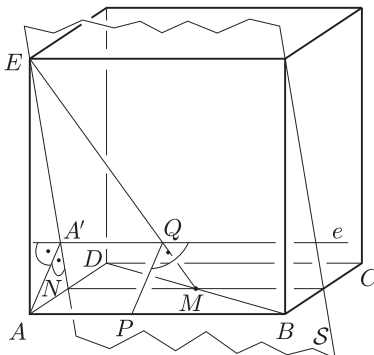
()

Birkus Róbert, Galánta, Kodály Z. Gimn., 11. évf. dolgozata alapján

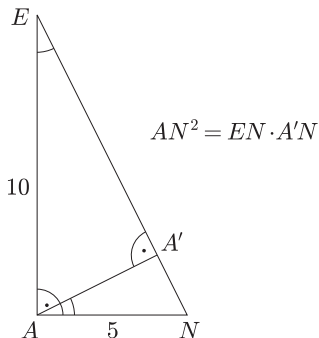
II. megoldás. Ha az AD él felezőpontját N -nel jelöljük, akkor az AB egyenes nyilván párhuzamos az E , M és N pontokra illeszkedő $\mathcal{S}$ síkkal. Az AB egyenes merőleges vetülete $\mathcal{S}$ -en egy olyan e egyenes, mely AB -vel párhuzamos és áthalad az A pont EN egyenesre eső A' merőleges vetületén, hiszen az AEN sík merőleges az $\mathcal{S}$ síkra és az AB egyenesre is (1. ábra). Az AB él hosszát 10 egységnyinek tekintve $AN = 5$, és a Pitagorasz-tétel alapján $EN = 5\sqrt{5}$, valamint $EM = 5\sqrt{6}$. Az AEN derékszögű háromszögben (2. ábra) a befogótétel szerint $AN^2 = EN \cdot A'N$, tehát

$$A'N = \frac{5^2}{(5\sqrt{5})} = \sqrt{5},$$

és ezért $EA' = 4\sqrt{5}$.



1. ábra



2. ábra

Ismert, hogy a PQ távolság pontosan akkor egyezik meg az AB és EM egyenesek távolságával, ha PQ merőleges mindkét egyenesre. Ezért a Q pont éppen az e egyenes EM egyenessel alkotott metszéspontja, P pedig Q merőleges vetülete az AB egyenesre. Az ENM és $EA'Q$ derékszögű háromszögek középpontosan hasonlóak, ezért

$$EQ = \left(\frac{EA'}{EN} \right) \cdot EM = 4\sqrt{6} \quad \text{és} \quad A'Q = \left(\frac{EA'}{EN} \right) \cdot NM = 4.$$

A Q pont tehát az EM szakaszt $4 : 1$ arányban osztó pont, P pedig az AB szakaszt $2 : 3$ arányban osztja, mert az $APQA'$ négyszög téglalap, tehát

$$AP = A'Q = 4.$$