

Megoldás. A $\sin 3x + 3 \cos x = 2 \sin 2x \cdot (\sin x + \cos x)$ egyenletben először alkalmazzuk az addíciós tételt a következő módon:

$$\begin{aligned}\sin(2x + x) + 3 \cos x &= 2 \sin 2x \cdot \sin x + 2 \sin 2x \cdot \cos x, \\ \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x + 3 \cos x &= 2 \sin 2x \cdot \sin x + 2 \sin 2x \cdot \cos x.\end{aligned}$$

Felhasználva a kétszeres szögek szinuszára, illetve koszinuszára vonatkozó összefüggéseket, az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x + 3 \cos x = 4 \sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x.$$

A 0-ra rendezés és a lehetséges összevonások után:

$$\begin{aligned}4 \sin^2 x \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - 3 \cos x &= 0, \\ 4 \sin^2 x \cdot \cos x + \sin x - 3 \cos x &= 0.\end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\cos x = 0$ nem vezet megoldáshoz, így $\cos x$ -szel eloszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$4 \sin^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

Ezután a $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$ azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$4 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Rendezve az egyenletet $\operatorname{tg} x$ -re vonatkozó harmadfokú egyenlethez jutunk, aminek megsejthetően 1 az egyik gyöke:

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3) = 0.$$

A másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív, ezért a fenti egyenlet egyetlen megoldása:

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

()

Tóth 156 Sándor (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 12. évf.) megoldása