

I. megoldás. Az abszolút értéken belül szereplő polinom páratlan együtthatójú tagjait az alábbi átalakítással két tagra bontjuk:

$$(2n+1)x^m = nx^m + (n+1)x^m.$$

Így

$$\begin{aligned} & x^{1000} + 2x^{999} + (x^{998} + 2x^{998}) + 4x^{997} + (2x^{996} + 3x^{996}) + \dots + \\ & \quad + (499x^2 + 500x^2) + 1000x + 500 + 501 = \\ & = (x^{1000} + 2x^{999} + x^{998}) + 2(x^{998} + 2x^{997} + x^{996}) + \dots + \\ & \quad + 500(x^2 + 2x + 1) + 501 = \\ & = (x^{500} + x^{499})^2 + 2(x^{499} + x^{498})^2 + \dots + 500(x+1)^2 + 501. \end{aligned}$$

Eszerint

$$f(x) = |(x^{500} + x^{499})^2 + 2(x^{499} + x^{498})^2 + 3(x^{498} + x^{497})^2 + \dots + 500(x+1)^2 + 501|.$$

Az abszolút értéken belül mindig pozitív érték szerepel, a négyzetes tagok mind ugyanott, (-1) -ben veszik fel legkisebb értéküket, a 0-t. (Az utolsó tag kivételével a 0 is közös minimumhely.) Így $f(x)$ minimuma $x = -1$ -ben van, és ott 501-gyel egyenlő.

() *Révész Dániel* (Kisvárdai, Bessenyei György Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat általánosan, 1000 helyett tetszőleges páros számra ugyanígy oldható meg.

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Belátjuk, hogy páros n esetén az $f_n(x) = (n+1) + nx + \dots + 2x^{n-1} + x^n$ kifejezés

1. minden x -re pozitív,
2. minimumhelye kizárólag a -1 ,
3. minimuma $\frac{n}{2} + 1$.

Ha $n = 2$, akkor $f_2(x) = 3 + 2x + x^2 = (x+1)^2 + 2$. A minimumhelye a -1 , minden x -re pozitív, valamint $f(-1) = 2$. Tegyük fel, hogy az indukciós állítások $2k$ -ig minden páros számra teljesülnek. Most bebizonyítjuk azokat $n = (2k+2)$ -re.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (n+1) + nx + (n-1)x^2 + \dots + 2x^{n-1} + x^n = \\ &= (n+1) + nx + x^2((n-1) + (n-2)x + \dots + 2x^{n-3} + x^{n-2}) = \\ &= (n+1) + nx + x^2 \cdot f_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $f_{n-2} \geq \frac{n}{2}$, tehát

$$f_n(x) \geq (n+1) + nx + \frac{n}{2}x^2 = \frac{n}{2}(x+1)^2 + \frac{n}{2} + 1.$$

A jobb oldali függvénynek a minimumhelye $x = -1$, itt (és csakis itt) egyenlőség áll fenn, ezért magának az $f_n(x)$ függvénynek is csak az $x = -1$ a minimumhelye, továbbá $f_n(-1) = \frac{n}{2} + 1$. Ezzel beláttuk a 2. és a 3. indukciós állítást. Marad még az 1. igazolása – ez azonban nyilvánvaló, hiszen f_n minimumértéke pozitív. Eszerint a feladatban szereplő kifejezésben az abszolút érték jele elhagyható.

Az eredeti függvény ($f = |f_{1000}| = f_{1000}$) legkisebb értéke $\frac{1000}{2} + 1 = 501$.

() *Juhász Máté Lehel* (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) dolgozata alapján

III. megoldás. Jelölje $g(x)$ az $1001 + 1000x + 999x^2 + \dots + 2x^{999} + x^{1000}$ polinomfüggvényt, ezzel $f(x) = |g(x)|$. A g függvény a nemnegatív számokon szigorúan monoton nő, és $g(0) = 1001$. Ha g -nek van ennél kisebb értéke, azt csak negatív helyen veheti fel. A minimumhelyen a függvény deriváltja 0.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1000 + 2 \cdot 999x + 3 \cdot 998x^2 + \dots + 998 \cdot 3x^{997} + 999 \cdot 2x^{998} + 1000x^{999} = \\ &= 1000(x^{999} + 1) + 2 \cdot 999x(x^{997} + 1) + 3 \cdot 998x^2(x^{995} + 1) + \dots + \\ & \quad + 500 \cdot 501x^{499}(x+1). \end{aligned}$$

A zárójelben szereplő kifejezések mindegyike osztható $(x+1)$ -gyel, ezért a derivált $(x+1)h(x)$ alakú. Így $g'(-1) = 0$, tehát (-1) -ben lehet g -nek szélsőértéke. Azt, hogy ez valóban minimumhely, úgy látjuk be, hogy bebizonyítjuk, hogy $g(x)$ minden (-1) -től különböző (negatív) számra nagyobb $g(-1) = 501$ -nél.

Írjuk fel g -t más formában:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x^{1000} + x^{999} + x^{998} + x^{997} + \dots + x^2 + x + 1 + \\
 &\quad + x^{999} + x^{998} + x^{997} + \dots + x^2 + x + 1 + \\
 &\quad + x^{998} + x^{997} + \dots + x^2 + x + 1 + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + x^2 + x + 1 + \\
 &\quad + x + 1 + \\
 &\quad + 1. \\
 g(x) &= \frac{x^{1001} - 1}{x - 1} + \frac{x^{1000} - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} = \\
 &= \frac{x^{1001} + x^{1000} + x^{999} + \dots + x^2 + x - 1001}{x - 1} = \\
 &= \frac{\frac{x^{1002} - 1}{x - 1} - 1002}{x - 1} = \frac{x^{1002} - 1 - 1002x + 1002}{(x - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Ebből tehát

$$g(x) = \frac{x^{1002} - 1002x + 1001}{(x - 1)^2}.$$

Tudjuk, hogy $g(-1) = 501$. Bebizonyítjuk, hogy minden más (negatív) x -re $g(x) > 501$, azaz

$$501 < \frac{x^{1002} - 1002x + 1001}{(x - 1)^2}, \quad x \neq -1.$$

Lévé, hogy negatív x -ekre $(x - 1)^2 > 0$, a bizonyítandó összefüggés az alábbival ekvivalens:

$$\begin{aligned}
 501(x - 1)^2 &< x^{1002} - 1002x + 1001, \quad \text{azaz} \\
 501x^2 - 1002x + 501 &< x^{1002} - 1002x + 1001 \\
 x^2 &< \frac{x^{1002} + 500}{501}.
 \end{aligned}$$

Írjuk föl a nemnegatív $a_1 = x^{1002}$, $a_2 = a_3 = \dots = a_{500} = 1$ mennyiségekre a számtani és a mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x^2 = \sqrt[501]{x^{1002}} \leq \frac{x^{1002} + 1 + 1 + \dots + 1}{501},$$

ebből következik a bizonyítandó állítás.

Tehát az $f(x)$ függvényben az abszolút érték jele elhagyható, az egyetlen minimumhelye a -1 , a minimum értéke pedig 501.

()

Farkas Balázs (Eger, Neumann János Gimn. és Szki., 11. o.t.) dolgozata alapján