

I. megoldás. Ismeretes, hogy ha a és b egész számok, n pedig pozitív egész, akkor $a^n - b^n$ osztható $(a - b)$ -vel. Ebből következik, hogy ha

$$f(x) = c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0$$

egész együtthatós polinom, továbbá a és b egész számok, akkor $f(a) - f(b) = c_k(a^k - b^k) + \dots + c_1(a - b)$ osztható $(a - b)$ -vel. Tegyük fel, hogy f minden pozitív egészre 2-hatvány értéket vesz fel; legyen $f(1) = 2^r$. Mivel $f - 2^r$ – akárcsak f – legfeljebb k -adfokú és nem konstans, azért nem lehet k -nál több gyöke. Ezért $f(x)$ legfeljebb k helyen veheti fel a 2^r értéket, tehát van olyan L küszöbérték, hogy $f(v) \neq 2^r$, ha $v > L$. Legyen m olyan természetes szám, amelyre $m \geq r + 1$ és $a = 2^m + 1 > L$. Ekkor az f -re tett feltevésünk szerint $f(a) = 2^t$, ahol $t \neq r$; jelölje q a t és r számok közül a kisebbiket. Nyilván $2^t - 2^r = 2^q(2^{t-q} - 2^{r-q})$ második tényezője páratlan, így $2^t - 2^r$ nem osztható 2^{q+1} -nel. Másrészt viszont $2^t - 2^r = f(a) - f(1)$ osztható $a - 1 = 2^m$ -nel, tehát $(m \geq r + 1 \geq q + 1$ miatt) 2^{q+1} -nel is, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy nem létezik a feladat követelményeit kielégítő polinom.

A következő megoldás – oszthatóság helyett a függvényvizsgálat módszerére és a határérték fogalmára építve – messzemenően általánosítja az eredeti feladatot.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ olyan n -ed fokú, valós együtthatós polinom, amely minden pozitív egész helyen 2-hatvány – tehát pozitív – értéket vesz föl; ezért főegyütthatója is pozitív. Ekkor egy elég nagy k_0 pozitív számtól kezdve a függvény szigorúan monoton növekedő. Így:

$$(1) \quad \text{Ha } k > k_0, \quad \text{akkor } \frac{P(k+1)}{P(k)} = 2^m \geq 2,$$

ahol m (k -től függő) pozitív egész szám.

Vizsgáljuk meg a $\frac{P(k+1)}{P(k)}$ sorozat határértékét, ha k tart a végtelenbe. Ha k^n -nel osztjuk a számlálót is és a nevezőt is:

$$\frac{\frac{P_n(k+1)}{k^n}}{\frac{P_n(k)}{k^n}} = \frac{\frac{a_n(k+1)^n}{k^n} + \dots + \frac{a_1(k+1)}{k^n} + \frac{a_0}{k^n}}{\frac{a_n k^n}{k^n} + \dots + \frac{a_1 k}{k^n} + \frac{a_0}{k^n}},$$

ahol a számláló első tagja a_n -hez, a többi tagja pedig nullához tart. A nevezőben levő tagok hasonlóan viselkednek. Ezért a $\frac{P(k+1)}{P(k)}$ sorozat határértéke 1. Ez azonban ellentmondás, hiszen (1) miatt $\frac{P(k+1)}{P(k)}$ 2-nél kisebb értéket nem vehet fel. Tehát nincs olyan nem konstans valós együtthatós polinom sem, amely minden pozitív egész helyen 2-hatvány értéket venne föl (ill. általánosabban: az értékeit egy olyan szigorúan monoton növekvő sorozat elemei közül venné fel, amelyben minden tag az előzőnek legalább d -szerese, ahol d egy 1-nél nagyobb konstans).

()

Révész Dániel (Kisvárdai, Bessenyi György Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján