

I. megoldás. Az

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$$

azonosság felhasználásával a feltételt $3(a+b)^2 + (a-b)^2 = 3(c+d)^2 + (c-d)^2$ alakba írhatjuk.

Rendezés és szorzattá alakítás után innen

$$3(a+b+c+d)(a+b-c-d) + (a+c-b-d)(a+d-b-c) = 0$$

adódik. Ha s a megadott egyenlőséget teljesítő a, b, c, d pozitív egészek összege, akkor az átrendezett feltétel a

$$3s(s-2c-2d) + (s-2b-2d)(s-2b-2c) = 0$$

alakot ölti, s hatványai szerint rendezve:

$$4s^2 - (4b+8c+8d)s + 4(b+d)(b+c) = 0.$$

Mivel egész számokról van szó, innen következik, hogy s osztója a $4(b+d)(b+c)$ szorzatnak.

Ha s prímszám, akkor osztania kell ennek a szorzatnak valamelyik tényezőjét is. Mivel az adott számok pozitívak, azért $0 < b+d, b+c < s$, ezeket a tényezőket s nem oszthatja. Így ha s prímszám, akkor csak $s \mid 4$ teljesülhet. Ez viszont nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen 4 egyetlen prímosztója 2, viszont négy pozitív egész összegeként s legalább 4.

Ez azt jelenti, hogy s valóban nem lehet prímszám.

() *Hartmann Zoltán* (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Végezzük el az adott egyenlőségben az $a = \frac{u+v}{2}$, $b = \frac{u-v}{2}$, illetve a $c = \frac{x+y}{2}$, $d = \frac{x-y}{2}$ helyettesítéseket. Ekkor $u = a+b$, $v = a-b$, illetve $x = c+d$ és $y = c-d$, az új változók egész számok, továbbá

$$s = a+b+c+d = u+x.$$

A helyettesítések után a bal oldal

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{3u^2+v^2}{4},$$

a jobb oldal pedig hasonlóan $\frac{3x^2+y^2}{4}$. Az így adódó egyenlőséget rendezve

$$3(u+x)(u-x) = (y+v)(y-v)$$

adódik, $s = u+x$ tehát osztója az $(y+v)(y-v)$ szorzatnak. Ha pedig az s prímszám, akkor osztania kell ennek a szorzatnak valamelyik tényezőjét. Azonban

$$-s = -a-b-c-d < y+v = a-b+c-d < a+b+c+d = s,$$

tehát $|y+v| < s$, és ugyanígy kapjuk, hogy $|y-v| < s$.

Mindkét tényező abszolút értéke tehát határozottan kisebb, mint s ; az s prím esetére talált oszthatóság eszerint csak úgy teljesülhet, ha a szóban forgó tényező értéke nulla. Így viszont a szorzat és a vele egyenlő bal oldal, $3(u+x)(u-x)$ is nulla. Ez utóbbi pedig pontosan akkor teljesül, ha $u = x$, az s tehát páros szám, és így valóban nem lehet prím, hiszen az értéke legalább 4.

III. megoldás. A fenti jelölésekkel nyilván $a+b \equiv -(c+d) \pmod{s}$, amit négyzetre emelve

$$(a+b)^2 \equiv (c+d)^2 \pmod{s}$$

adódik. Alakítsuk át a feltétel egyenlőségének két oldalán álló mennyiségeket az

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - y(x+y) + y^2$$

azonosság, illetve a kapott kongruenciák felhasználásával:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - b(a+b) + b^2 &= (c+d)^2 - d(c+d) + d^2 \equiv \\ &\equiv (a+b)^2 + d(a+b) + d^2 \pmod{s}. \end{aligned}$$

Innen rendezés után kapjuk, hogy

$$(d+b)(a+b) + d^2 - b^2 = (d+b)(a+d) \equiv 0 \pmod{s},$$

azaz s osztója a $T = (d+b)(a+d)$ szorzatnak. Mivel $s = a+b+c+d$ és a megadott számok pozitív egészek, azért T mindkét tényezője kisebb s -nél, amely így egyiküknek sem lehet osztója. Ebből pedig következik, hogy s valóban nem prímszám.

() *Pálvölgyi Dénes* (Budapest, Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján