

Megoldás. Legyen a beírt kör sugara r , a hozzáírt körök sugara r_a , r_b és r_c , jelölje a háromszög félkerületét s , a háromszög területét pedig T . Ismert, hogy például $r_a = \frac{T}{s-a}$. Így

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{s-a}{T} + \frac{s-b}{T} + \frac{s-c}{T} = \frac{3s - (a+b+c)}{T} = \frac{3s-2s}{T} = \frac{s}{T}.$$

A beírt kör sugaráról pedig tudjuk, hogy $\frac{1}{r} = \frac{s}{T}$, hiszen $T = r \cdot s$. Tehát

$$(1) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Legyen $r_a \leq r_b \leq r_c$, azaz $\frac{1}{r_a} \geq \frac{1}{r_b} \geq \frac{1}{r_c}$. Az (1) összefüggésben írjunk $\frac{1}{r_a}$ és $\frac{1}{r_b}$ helyére nem nagyobbat, azaz $\frac{1}{r_c}$ -t! Ekkor $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_c}$, vagyis $\frac{1}{r} \geq \frac{3}{r_c}$, azaz valóban $r_c \geq 3r$.

(*Reiss Attila (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 12. évf.) és Matyuska Ferenc (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján*)