

I. megoldás. Vizsgáljuk meg, mikor teljesül a feladat feltétele egy adott α számra, azaz mit jelent az, hogy $f(f(f(\alpha))) = \alpha$. Ehhez általában számoljuk ki $f(f(f(\alpha)))$ értékét. Mivel a feladat $f(f(f(1)))$ értékéről beszél, azért számolás közben fölteszük, hogy valamennyi mennyiség értelmes, az előforduló nevezők egyike sem nulla.

$$f(f(\alpha)) = f\left(\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}\right) = \frac{a\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} + b}{c\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} + d}.$$

Bővítés és rendezés után

$$f(f(\alpha)) = \frac{(a^2 + bc)\alpha + b(a + d)}{c(a + d)\alpha + (bc + d^2)}.$$

Ebbe helyettesítve $f(\alpha)$ értékét:

$$f(f(f(\alpha))) = \frac{(a^2 + bc)f(\alpha) + b(a + d)}{c(a + d)f(\alpha) + (bc + d^2)} = \frac{(a^2 + bc)\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} + b(a + d)}{c(a + d)\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} + (bc + d^2)}.$$

Ismét bővítve és rendezve

$$f(f(f(\alpha))) = \frac{[a(a^2 + bc) + bc(a + d)]\alpha + b[(a^2 + bc) + d(a + d)]}{c[a(a + d) + (bc + d^2)]\alpha + [bc(a + d) + d(bc + d^2)]}.$$

Az $f(f(f(\alpha))) = \alpha$ egyenlőséget a bal oldal imént kapott tört alakjának a nevezőjével szorozva és α hatványai szerint rendezve kapjuk, hogy:

$$(1) \quad [c(a^2 + ad + d^2 + bc)]\alpha^2 - [a^3 + abc - bcd - d^3]\alpha - b(a^2 + bc + da + d^2) = 0.$$

Vegyük észre, hogy α együtthatója szorzattá alakítható:

$$a^3 + abc - bcd - d^3 = a^3 - d^3 + bc(a - d) = (a - d)(a^2 + ad + d^2 + bc),$$

így pedig a $P = a^2 + ad + d^2 + bc$ tényező (1) mindhárom tagjában szerepel, szorzattá alakíthatunk: ha $f(f(f(\alpha))) = \alpha$, akkor

$$(2) \quad P \cdot [c\alpha^2 - (a - d)\alpha - b] = 0.$$

Ellenőrizhető, hogy ha $f(f(f(\alpha)))$ kiszámolásakor egyik nevező sem nulla, akkor (2)-ből a lépések megfordításával megkapható az $f(f(f(\alpha))) = \alpha$ feltétel. Vegyük észre, hogy a (2)-beli szorzat első tényezője, P , nem függ α értékétől. Ha tehát ez a tényező nulla – ami kizárólag az f függvényen múlik –, akkor $f(f(f(\alpha))) = \alpha$ minden olyan α számra teljesül, amelyre $f(f(f(\alpha)))$ értelmes. A feladat második feltétele szerint viszont $f(f(f(2))) = 3$, az első tényező így most nem nulla, (2)-ben tehát a második tényezőnek kell nullának lennie, ha $\alpha = 1$:

$$c - (a - d) - b = 0,$$

azaz $a + b = c + d$. Innen viszont $f(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1$ következik, és ezt akartuk bizonyítani. (Ismét meg kell jegyeznünk, hogy a feladat szerint $f(1)$ értelmes, tehát oszthatunk $(c + d)$ -vel.)

()

Több dolgozat alapján.

Megjegyzések. 1.) A feladat második feltétele csak annyiban lényeges, hogy

$$f(f(f(\alpha))) = \alpha$$

nem azonosság. Az $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ függvényre például $f(f(f(x))) = x$ a teljes értelmezési tartományon, de $f(1) = 2$. Ebben az esetben az első tényező,

$$P = a^2 + ad + d^2 + bc = 1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot 1 = 0.$$

Általában is így készíthetők olyan elsőfokú törtfüggvények, amelyeket háromszor iterálva az identitást kapjuk.

2.) A megoldásból kiderül, hogy az α szám pontosan akkor fixpontja az $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ elsőfokú törtfüggvénynek, ha α gyöke $cx^2 - (a-d)x - b$ polinomnak. Ez lehet elsőfokú, ha $c = 0$, ilyenkor az $f(x)$ – legfeljebb – elsőfokú polinom. A feladat úgy is megoldható, hogy annak számolunk utána, hogyan alakul ez az egyenlet $f(f(x))$, illetve $f(f(f(x)))$ esetén. A megoldáshoz hasonló számolással adódik, hogy az $f(f(x))$ függvény fixpontjait kiszámoló egyenlet $(a + d)[cx^2 - (a-d)x - b] = 0$, az $f(x)$ -re vonatkozó megfelelő egyenlet $(a + d)$ -szerese – és így $a + d = 0$ annak a feltétele,

hogy $f(f(x))$ az identikus leképezés legyen –, az $f(f(f(x)))$ függvény fixpontjait pedig éppen a $P[cx^2 - (a-d)x - b] = 0$ egyenlet számolja ki.

3.) A megoldás során lényegében azt igazoltuk, hogy ha az $f(f(f(\alpha))) = \alpha$ egy adott értékre nem triviális módon – azaz anélkül, hogy a közbülső $f(\alpha)$, $f(f(\alpha))$ értékek egyenlők volnának α -val – teljesül, akkor fennáll az értelmezési tartomány minden elemére. Másképpen fogalmazva: ha a $g(x) = f(f(f(x)))$ függvénynek van fixpontja, azaz olyan α szám, amelyre $g(\alpha) = \alpha$, akkor az vagy az f függvénynek is fixpontja, vagy pedig a $g(x)$ függvénynek minden szám fixpontja, $g(x) = x$ a g értelmezési tartományán. A megoldás kétségkívül szerencsésen alakult, a hosszadalmas számolás után a (2) szorzatba mintegy belebotolva találtunk rá a feladat jelentésére, és így magára az állításra is. Az alábbi megközelítés csak a lényeges dolgokat veszi figyelembe.

II. megoldás. Legyen továbbra is $g(x) = f(f(f(x)))$, és tekintsük a $p = f(1)$ és a $q = f(p) = f(f(1))$ értékeket. A feltétel szerint ekkor $f(q) = 1$. Azonnal adódik, hogy $g(p) = p$ és $g(q) = q$, a $g(x)$ függvénynek az 1 mellett a p és a q is fixpontja. Ha e három érték között vannak egyenlők, akkor az $1 \xrightarrow{f} p \xrightarrow{f} q \xrightarrow{f} 1$ láncban van két szomszédos egyenlő tag, ahonnan, mivel f kölcsönösen egyértelmű, $1 = p = q$, azaz a bizonyítandó állítás, $f(1) = 1$ következik.

Ha az 1, p , q számok között nincsenek egyenlők, akkor az elsőfokú törtfüggvények kompozíciójaként adódó $g(x)$ függvénynek, amely így maga is elsőfokú törtfüggvény, három különböző fixpontja van. Ismeretes, hogy egy elsőfokú törtfüggvényt három értéke egyértelműen meghatároz. Ha tehát $f(1) \neq 1$, akkor $g(x) = x$ teljesül az x három különböző értékére, 1-re, p -re és q -ra. Ez pedig azt jelenti, hogy a $g(x)$ értelmezési tartományának minden elemére $g(x) = x$. A feltétel szerint viszont $g(2) = 3$, így az 1, p , q számok nem lehetnek valamennyien különbözők. Ezzel a megoldást befejeztük.

()

Gyarmati Ákos (Zalaegerszeg, Zrínyi Miklós Gimn., 9. évf.)