I. megoldás (*Kocsis Albert Tihamér* és *Zsbán Ambrus* megoldása alapján). Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Először is győződjünk meg arról, hogy az állítás $n=2,3$ esetén igaz. Valóban, ha $n=2$, akkor feltételünk $1<\frac{a}{b}<2$, ahonnan $b\ge 2=f_3$. Ha pedig $n=3$, akkor $\frac{3}{2}<\frac{a}{b}<2$ miatt $b\ge 3=f_3$. A továbbiakban tegyük fel tehát, hogy $m\ge 3$ és az állítást $2\le n\le m$ esetén már igazoltuk.

Legyen most $n=m+1$, és tegyük fel, hogy $\frac{f_n}{f_{n-1}}<\frac{f_{n+1}}{f_n}$, továbbá az a, b pozitív egészekre $\frac{f_{m+1}}{f_m}=\frac{f_n}{f_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{f_{m+2}}{f_{m+1}}$. Az egyenlőtlenségben szereplő számokat eggyel csökkentve kapjuk, hogy

$$\frac{f_{m-1}}{f_m}=\frac{f_{m+1}-f_m}{f_m}<\frac{a-b}{b}<\frac{f_{m+2}-f_{m+1}}{f_{m+1}}=\frac{f_m}{f_{m+1}}.$$

Mivel az egyenlőtlenség mindkét szélén (és így középen is) pozitív számok állnak, a benne szereplő kifejezések reciprokát véve az egyenlőtlenség iránya megváltozik, és a következőt kapjuk:

$$\frac{f_m}{f_{m-1}}>\frac{b}{a-b}>\frac{f_{m+1}}{f_m}.$$

Ezért az indukciós feltevésünk alapján $a-b\ge f_{m+1}$. Az imént nyert egyenlőtlenségben szereplő számokat megint eggyel csökkentve, majd az így kapott számok reciprokát véve most az

$$\frac{f_{m-1}}{f_{m-2}}<\frac{a-b}{2b-a}<\frac{f_m}{f_{m-1}}$$

egyenlőtlenségre jutunk, ahonnan ismét az indukciós feltételt alkalmazva megállapíthatjuk, hogy $2b-a\ge f_m$.

Az így nyert két eredményt összegezve:

$$b=(2b-a)+(a-b)\ge f_m+f_{m+1}=f_{m+2}=f_{n+1}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben az állítás $n=m+1$ esetén is igaz. Hogy az indukciós lépést teljessé tegyük, meg kell vizsgálnunk azt is, mi történik, ha $\frac{f_{m+1}}{f_m}=\frac{f_n}{f_{n-1}}>\frac{a}{b}>\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{f_{m+2}}{f_{m+1}}$. Ebben az esetben is szóról szóra elmondhatjuk az előző érvelést; az egyetlen különbség, hogy a felírt egyenlőtlenségekben mindenhol fel kell cserélnünk a „$<$” és „$>$” relációk szerepét.

II. megoldás (*Egri Attila* megoldása alapján). A megoldás során feltesszük, hogy $\frac{f_n}{f_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Minden számot megszorozva a pozitív $bf_{n-1}f_n$ számmal a

$$bf_n^2<af_{n-1}f_n<bf_{n-1}f_{n+1}$$

egyenlőtlenségre jutunk. Itt az első két szám különbsége, $f_n\cdot(af_{n-1}-bf_n)$ olyan pozitív egész szám, amely osztható f_n-nel, ezért nagysága legalább f_n. Hasonló okok miatt a második két szám különbsége, $f_{n-1}\cdot(bf_{n+1}-af_n)$ legalább f_{n-1}. Következésképpen a két szélső szám különbsége:

$$b(f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2)\ge f_n+f_{n-1}=f_{n+1}.$$

Elegendő tehát annyit megmutatni, hogy $k_n=f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=1$.

Ha $n=2$, akkor $k_n=1$, ha pedig $n=3$, akkor $k_n=-1$. Még néhány értéket megvizsgálva azt tapasztaljuk, hogy k_n értéke felváltva 1 és -1, vagyis $k_n=(-1)^n$. Valóban, $n=2$ esetén ez így van, ha pedig valamely $n\ge 2$ egész számra már beláttuk, akkor

$$\begin{aligned}k_{n+1}&=f_nf_{n+2}-f_{n+1}^2=f_n(f_n+f_{n+1})-f_{n+1}^2=\\&=f_n^2-f_{n+1}(f_{n+1}-f_n)=f_n^2-f_{n+1}f_{n-1}=-k_n=-(-1)^n=(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Mivel esetünkben b és f_{n+1} is pozitív, szükségképpen k_n is pozitív, vagyis értéke nem lehet más, mint 1, amint azt bizonyítani kívántuk. Teljesen hasonló módon járhatunk el akkor is, ha $\frac{f_n}{f_{n-1}}>\frac{a}{b}>\frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Megjegyzés. Ebből a megoldásból leolvasható az az általánosabb eredmény is, mely szerint ha az a, b, x, y, z, v pozitív egészekre $yz-xv=1$ és $\frac{x}{y}<\frac{a}{b}<\frac{z}{v}$, akkor szükségképpen $b\ge y+v$.

III. megoldás. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy n páros. Az előző megoldás során használt $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n$ összefüggés alapján tehát a feltétel most $\frac{f_n}{f_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{f_{n+1}}{f_n}$ alakban teljesül. Az

$$\frac{a}{b}-\frac{f_n}{f_{n-1}}=\frac{af_{n-1}-bf_n}{bf_{n-1}}$$

különbség pozitív, ezért itt az egész értékű számláló legalább 1. Következésképp

$$\frac{1}{bf_{n-1}} \leq \frac{a}{b} - \frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n},$$

ahonnan $bf_{n-1} > f_{n-1}f_n$, vagyis $b > f_n$.

Vizsgáljuk az $\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$ törtet, ez kisebb, mint $\frac{f_{n+1}}{f_n}$. Ha

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} < \frac{a}{b} < \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

is teljesül, akkor az előző érveléshez hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{1}{bf_n} \leq \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{a}{b} < \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n+1}f_n},$$

ahonnan $b > f_{n+1}$.

Ha $\frac{a}{b} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$, akkor $b \geq f_{n+1}$, ugyanis f_{n+2} és f_{n+1} relatív prímek. Erről így győződhetünk meg: ha egy d pozitív egész szám osztója f_{n+2}-nek és f_{n+1}-nek is, akkor osztója az $f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$ különbségnek is. Ezt a gondolatmenetet tovább folytatva látható, hogy d osztója az $f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_1$ számoknak is. Mivel $f_1 = 1$, d nem lehet más, mint 1.

Már csak azt kell megvizsgálnunk, mi van akkor, ha $\frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{a}{b} < \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$. Ehhez az $\ell_n = f_{n+2}f_{n-1} - f_nf_{n+1}$ különbséget tekintve, teljes indukcióval könnyen kapható, hogy $\ell_n = (-1)^n$, és ezért

$$\frac{1}{bf_{n-1}} \leq \frac{a}{b} - \frac{f_n}{f_{n-1}} < \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1}{f_{n+1}f_{n-1}},$$

ahonnan ismét $b > f_{n+1}$ adódik.

Teljesen hasonló eljárással érhetünk célt akkor is, ha n páratlan szám.

Többen az úgynevezett Farey-sorozatok elméletét használták fel bizonyításuk során. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát.

IV. megoldás (*Pallos Péter* megoldása alapján). Az $\mathcal{F}_1 = \left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right)$ sorozatból kiindulva rekurzív módon készítsük el a következő sorozatokat. Ha az $\mathcal{F}_n$ sorozatot már definiáltuk, akkor annak bármely két egymást követő $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ eleme közé illesszük be az $\frac{a+c}{b+d}$ törtet. Könnyű ellenőrizni, hogy ha az $\mathcal{F}_n$ sorozat szigorúan növekedő volt, akkor ugyanez igaz az így kapott $\mathcal{F}_{n+1}$ sorozatra is. Megoldásunk az alábbi két tételre támaszkodik: 1) *az $\mathcal{F}_n$ sorozatban minden tört redukált alakban jelenik meg;* 2) *minden* 0 *és* 1 *közé eső racionális szám eleme valamelyik $\mathcal{F}_n$ sorozatnak.*

Vegyük észre, hogy $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ és $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ szomszédos elemei az $\mathcal{F}_n$ sorozatnak. Valóban, ez $n = 2$ esetén így van, ha pedig valamely $n \geq 2$ egész számra $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ és $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ az $\mathcal{F}_n$ sorozat szomszédos elemei, akkor az $\mathcal{F}_{n+1}$ sorozatban e két tört közé éppen az

$$\frac{f_{n-1} + f_n}{f_n + f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}$$

törtet illesztjük be, így az állítás $n+1$-re is teljesülni fog.

Mivel az f_n sorozat szigorúan növekedő, a feladatban szereplő $\frac{a}{b}$ tört 1-nél nagyobb. A fent említett tételek alapján a $\frac{b}{a}$ tört tehát valamilyen redukált $\frac{b'}{a'}$ alakban megjelenik valamely $\mathcal{F}_m$ sorozatban. Mivel $\frac{b'}{a'}$ az $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ és $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ törtek egyikénél nagyobb, másikánál kisebb, nyilvánvaló, hogy $m > n$. Az $\mathcal{F}_m$ sorozatok konstrukciójából adódóan viszont látható, hogy minden, az $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ és $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ közé bekerülő tört számlálója legalább $f_{n-1} + f_n$ lesz, amiért is

$$b \geq b' \geq f_{n-1} + f_n = f_{n+1},$$

ahogyan azt bizonyítani akartuk.

Megjegyzés. Ebben a megoldásban tulajdonképpen „ágyúval lőttünk verébre”, tudniillik a Farey-sorozatokra vonatkozó tételek bizonyításához éppen azokra a gondolatokra van szükség, amelyeket az előző megoldások során használtunk.