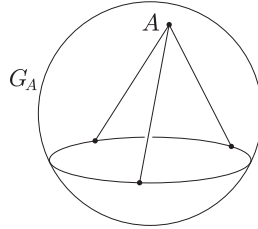
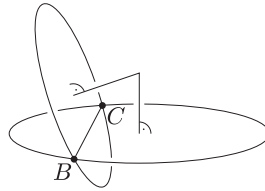


Megoldás. Nevezzük kivételesnek azt a lapot, amelyről nem tudjuk, hogy van körülírt köre. Tekintsük azokat a csúcsokat, amelyek nincsenek rajta a kivételes lapon. Legyen A egy ilyen csúcs. Az A -ból kiinduló három él végpontjai (A -val együtt) egy tetraédert határoznak meg, amelynek egyértelműen létezik a G_A körülírt gömbje. A konvex poliéder A -t tartalmazó három lapja – mivel a poliéder minden csúcsából három él indul ki, ezért a poliéder minden csúcsa három lapon van rajta – G_A -t egy-egy körben metszi. Ezek a körök a megfelelő lapoknak legalább három-három csúcsát tartalmazzák, ezért megegyeznek a lapok körülírt köreivel. Vagyis az A -t tartalmazó lapok valamennyi csúcsa – azok is, amelyek esetleg a kivételes lapon is rajta vannak – G_A -n van.



1. ábra

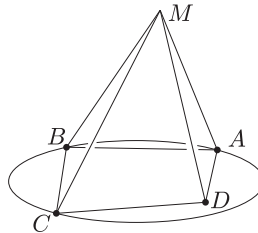
Legyen B és C két olyan csúcs, amelyek egyike sincs rajta a kivételes lapon, a BC szakasz pedig a poliéder egyik éle. Legyen G_B és G_C az előző bekezdésben leírtak szerint B -hez, illetve C -hez tartozó gömb. A poliéder BC élére illeszkedő két lapjának körülírt köreit mind a két gömb tartalmazza. Két, egymást metsző, de nem egy síkban lévő körvonal viszont egyértelműen meghatároz egy mindkettőjüket tartalmazó gömbfelületet (2. ábra), ezért G_B és G_C azonos.



2. ábra

A poliéder élei által alkotott gráf akkor is összefüggő marad, ha a kivételes lapon lévő éleket elhagyjuk, ezért az eddigiekből következik, hogy azok a csúcsok, amelyek nincsenek rajta a kivételes lapon, valamennyien rajta vannak egy G gömbön. Sőt, G tartalmazza azokat a csúcsokat is, amelyeknek van olyan szomszédja, amelyik nincs rajta a kivételes lapon. Viszont ilyen szomszédja a kivételes lap minden csúcsának van (mindegyiknek pontosan egy), ezért a poliéder minden csúcsa G -n van.

Tehát a kivételes lap minden csúcsa rajta van a lap síkjának és G -nek a metszetén, vagyis a kivételes lapnak is van körülírt köre. () *Juhász Máté Lehel* (Budapest, Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozatának felhasználásával



3. ábra

Megjegyzés. Feladatunk állítása nem igaz, ha nem követeljük meg, hogy a poliéder minden csúcsából pontosan három él induljon ki. Például legyen $ABCDM$ egy olyan négyszög alapú gúla, melynek $ABCD$ alaplappja nem húrnégyszög (3. ábra). A lapok $ABCD$ kivételével háromszögek, tehát van körülírt körük, $ABCD$ -nek viszont nincs. Feladatunk hagyjuk annak meggondolását, hogy bizonyításunk miért nem működik ebben az esetben.