

I. megoldás. Jelölje a sorozat egyik tagját a , különbségét pedig d . A feladat feltételeiből következik, hogy a és d pozitív egész. Ha m tetszőleges pozitív egész, akkor $c_m = a(d+1)^m$ is eleme a sorozatnak, hiszen a -tól való különbsége $a((d+1)^m - 1)$, ami d -nek pozitív egész többszöröse. A c_m számok prímosztói nem függenek az m -től, ezért a legnagyobb prímosztójuk sem; jelöljük ezt p -vel. Mivel c_m tetszőlegesen nagy lehet, azért $\frac{c_m}{p}$ sem lehet (felülről) korlátos. ()

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghegy Ferenc Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Legyen a sorozat első eleme a , különbsége d . Válasszunk egy olyan k természetes számot, amely a -nál is és d -nél is nagyobb; legyen továbbá p és q két olyan prímszám, amelyekre $k < p < q$. Az $a, a+d, a+2d, \dots, a+(pq-1)d$ számok mind különböző maradékot adnak pq -val osztva, hiszen közülük az i -ediknek és a j -ediknek a különbsége $(i-j)d$; itt egyrészt $d < p < q$ miatt d relatív prím a pq -hoz, másrészt $0 < |i-j| < pq$, ezért $(i-j)d$ valóban nem osztható pq -val. Létezik tehát az összesen pq darab szám között (pontosan) egy, amely osztható pq -val, legyen ez $a+td$. Ha ezt a számot elosztjuk a legnagyobb prímosztójával – ami legalább q , vagyis semmiképpen sem p –, a kapott hányados továbbra is osztható lesz p -vel, és így nagyobb, mint k . Mivel a k számot tetszőlegesen nagyra választhattuk, a kapott hányados is akármilyen nagy lehet. ()

Torma Róbert (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 9. évf.)

III. megoldás. Jelölje a sorozat egy tetszőleges elemét a , különbségét d . Ekkor $b = a + ad = a(1+d)$ is eleme a sorozatnak. Legyen p az a legnagyobb prímosztója, q pedig b legnagyobb prímosztója; mivel $a \mid b$, azért $p \leq q$. Ha $q = p$, akkor $\frac{a}{p} < \frac{a(1+d)}{p} = \frac{a(1+d)}{q} = \frac{b}{q}$, míg $q > p$ esetén $q \mid 1+d$ miatt $\frac{a}{p} < a \leq a \frac{(1+d)}{q} = \frac{b}{q}$. A kapott sorozat tehát nem korlátos, hiszen minden tagjánál van nagyobb tagja.