

Megoldás. A csupa 1-esből álló számok közül a 111111 a legkisebb 7-tel osztható, és ez osztható 37-tel is. Legyen K az n darab 1-esből álló szám, és osszuk el n -et maradékosan 6-tal: $n = 6k + x$, ahol $0 < x \leq 6$. Ekkor

$$\begin{aligned} K &= \underbrace{11 \dots 11}_{x} \underbrace{\dots 11}_{6k} = \underbrace{11 \dots 1}_{x} \cdot 10^{6k} + 111111 \cdot 10^{6k-6} + 111111 \cdot 10^{6k-12} + \\ &\quad + \dots + 111111 \cdot 10^6 + 111111 = \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_{x} \cdot 10^{6k} + 111111 \cdot (10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \dots + 10^6 + 1). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy itt az összeg második tagja 7-tel is és 37-tel is osztható; így K pontosan akkor osztható 7-tel, ha az első tag, $\underbrace{11 \dots 1}_{x} \cdot 10^{6k}$ osztható 7-tel. Ez csak úgy lehet, ha $7 \mid \underbrace{11 \dots 1}_{x}$, ami a $0 < x \leq 6$ tartományon belül csak $x = 6$ -ra áll fenn. Ebben az esetben viszont $37 \mid \underbrace{11 \dots 1}_{x}$ is teljesül. Ezzel az állítást beláttuk.

()

Kajtár Máté (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 10. évf.)