

I. megoldás. Mivel a 71 prímszám, Wilson tétele szerint (lásd pl. Freud R. – Gyarmati E. *Számelmélet* c. egyetemi tankönyvét) $70! + 1$ osztható 71-gyel. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy $61!$ ugyanazt a maradékot adja 71-gyel osztva, mint $70!$. Vizsgáljuk meg ennek megfelelően az $A = 62 \cdot 63 \cdot \dots \cdot 70$ szorzatot.

$$\begin{aligned} A &\equiv (71-9) \cdot (71-8) \cdot (71-7) \cdot \dots \cdot (71-1) \equiv (-9) \cdot (-8) \cdot (-7) \cdot \dots \cdot (-1) = \\ &= 72 \cdot (-7!) \equiv -7! = -70 \cdot 72 \equiv 1 \pmod{71}, \end{aligned}$$

vagyis $70! = A \cdot 61! \equiv 61! \pmod{71}$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. A beérkezett megoldások két csoportba sorolhatók: a Wilson tételt használókra és azokra, amelyekben a $61!$ maradékát több lépésben számolták ki. Az utóbbi megoldásnak az az előnye, hogy az összes olyan n számot megadhatja, amelyre 71 osztója $n! + 1$ -nek. Ezek az n értékek a 7, 9, 19, 51, 61, 63. Ezt Bartha Ágnes, Birkner Tamás, Haszpra Tímea és Visnovitz Ferenc ki is emelték dolgozatukban.

II. megoldás. Számoljuk ki, hogy mely n számokra osztható 71-gyel az $n! + 1$ (n pozitív egész). Az $n!$ osztási maradékát, r_n -t az $(n-1)!$ osztási maradékából, r_{n-1} -ből a következőképpen kaphatjuk meg: $r_n = r_{n-1} \cdot n - 71 \left\lfloor \frac{r_{n-1} \cdot n}{71} \right\rfloor$, ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	19	...	51	...	61	62	63
r_n	1	1	2	6	24	49	10	70	63	70	...	70	...	70	...	70	9	70

A 71-gyel osztva 70 maradékot adó számokhoz 1-et adva 71-gyel osztható számokat kapunk. Ezek a megjegyzésben már említett számok, közöttük az utolsó előtti a 61. Ezzel feladatunk állítását is beláttuk.