**I. megoldás.** Tegyük fel, hogy létezik olyan $x$ egész szám, amelyre

$$a^4 + (a+b)^4 + b^4 = x^2.$$

Alakítsuk át az egyenletet: $a^4+b^4 = x^2-(a+b)^4$. A bal oldalt tovább alakítva: $\big[(a+b)^2-2ab\big]^2-2a^2b^2 = x^2-(a+b)^4$, azaz $2(a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2(ab)^2 = x^2$. Innen $x^2 = 2\big[(a+b)^2 - ab\big]^2$.

Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x = 0$, mert a bal oldalon egy négyzetszám áll, melyben minden prímtényező páros hatványon szerepel, a jobb oldalon viszont a 2 kitevője páratlan.

Vagyis $(a+b)^2 - ab = 0$. Elvégezve a négyzetre emelést, kapjuk, hogy

$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$

Innen, ha $b = 0$, akkor $a$ is egyenlő 0-val. Ha viszont $b \neq 0$, akkor

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2}.$$

A diszkrimináns negatív, vagyis nincs megoldása az egyenletnek még a valós számok körében sem. A kifejezés csak $a = b = 0$ esetén lesz négyzetszám.

**II. megoldás.** Négyzetszám (és így minden negyedik hatvány is) 4-gyel osztva 0-t vagy 1-et adhat csak maradékul, előbbit akkor, ha páros, utóbbit akkor, ha páratlan. Valóban, ha $x$ páros, akkor $x = 2k$, ezért $x^2 = 4k^2$ osztható 4-gyel. Ha pedig $x$ páratlan, akkor $x = 2k+1$, így

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Így $a$, $b$ és $a+b$ közül legfeljebb egy lehet páratlan, hiszen az összegük – ami négyzetszám – csak így adhat 0 vagy 1 maradékot 4-gyel osztva. Ha azonban pl. $a$ páratlan, és akkor $b$ szükségképpen páros, úgy $a+b$ is páratlan lenne, ami ellentmondás. Tehát $a$ és $b$ egyaránt páros (és akkor persze $a+b$ is az): $a = 2a_1$, $b = 2b_1$. Ezért, ha $a^4 + (a+b)^4 + b^4 = 16\big(a_1^4 + (a_1+b_1)^4 + b_1^4\big)$ négyzetszám, akkor $a_1^4 + (a_1+b_1)^4 + b_1^4$ is az. Így $a_1$ és $b_1$ egyaránt páros, és így tovább. Azt kaptuk, hogy $a$ és $b$ a 2-nek akárhányadik hatványával osztható, ami csak akkor lehetséges, ha $a = b = 0$; ez a feladat egyetlen megoldása.