I. megoldás. Tegyük fel, hogy létezik olyan x egész szám, amelyre

$$a^4+(a+b)^4+b^4=x^2.$$

Alakítsuk át az egyenletet: $a^4+b^4=x^2-(a+b)^4$. A bal oldalt tovább alakítva: $\big[(a+b)^2-2ab\big]^2-2a^2b^2=x^2-(a+b)^4$, azaz $2(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2=x^2$. Innen $x^2=2\big[(a+b)^2-ab\big]^2$.

Az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x=0$, mert a bal oldalon egy négyzetszám áll, melyben minden prímtényező páros hatványon szerepel, a jobb oldalon viszont a 2 kitevője páratlan.

Vagyis $(a+b)^2-ab=0$. Elvégezve a négyzetre emelést, kapjuk, hogy

$$a^2+ab+b^2=0.$$

Innen, ha $b=0$, akkor a is egyenlő 0-val. Ha viszont $b\neq 0$, akkor

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4b^2}}{2}.$$

A diszkrimináns negatív, vagyis nincs megoldása az egyenletnek még a valós számok körében sem. A kifejezés csak $a=b=0$ esetén lesz négyzetszám.

II. megoldás. Négyzetszám (és így minden negyedik hatvány is) 4-gyel osztva 0-t vagy 1-et adhat csak maradékul, előbbit akkor, ha páros, utóbbit akkor, ha páratlan. Valóban, ha x páros, akkor $x=2k$, ezért $x^2=4k^2$ osztható 4-gyel. Ha pedig x páratlan, akkor $x=2k+1$, így

$$x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1.$$

Így a, b és $a+b$ közül legfeljebb egy lehet páratlan, hiszen az összegük – ami négyzetszám – csak így adhat 0 vagy 1 maradékot 4-gyel osztva. Ha azonban pl. a páratlan, és akkor b szükségképpen páros, úgy $a+b$ is páratlan lenne, ami ellentmondás. Tehát a és b egyaránt páros (és akkor persze $a+b$ is az): $a=2a_1$, $b=2b_1$. Ezért, ha $a^4+(a+b)^4+b^4=16\big(a_1^4+(a_1+b_1)^4+b_1^4\big)$ négyzetszám, akkor $a_1^4+(a_1+b_1)^4+b_1^4$ is az. Így a_1 és b_1 egyaránt páros, és így tovább. Azt kaptuk, hogy a és b a 2-nek akárhányadik hatványával osztható, ami csak akkor lehetséges, ha $a=b=0$; ez a feladat egyetlen megoldása.