

I. megoldás. A törés-törvény szerint (az *ábra* jelöléseivel)

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n.$$

a) d maximális értéke ($d_{\max}$) mellett az AB fénysugár érintőleges, azaz $\beta = 90^\circ$, így $\sin \alpha = 1/n$.

b) $\sin \alpha = d_{\max}/R$, innen $n = R/d_{\max}$. A megadott n mellett $d_{\max} = 3,55$ cm.

c) Általános esetben az OB szakasz f hossza

$$f = R \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)} \right)$$

A szélső esetben $\beta = 90^\circ$, ebből

$$f_{\min} = \frac{R}{\cos \alpha} = R \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} = 7,1 \text{ cm.}$$

Ha d tart nullához, minden szög kicsi, így $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$, $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) \approx (\beta - \alpha)$, és $\beta/\alpha \approx n$, tehát

$$f_{\max} = R \frac{n}{n - 1} = 17,1 \text{ cm.}$$

Belátható, hogy f monoton csökkenő függvénye d -nek, tehát d változtatásakor az OB szakasz hossza e két határ közötti értékeket vesz fel.

Több megoldás alapján

II. megoldás. Számítsuk ki f -et tetszőleges α esetére! Az OAB háromszögre felírhatjuk a szinusz-tételt:

$$\frac{OB}{AB} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n,$$

(felhasználtuk a törési törvényt is), ahonnan

$$AB = \frac{f}{n}.$$

Másrészt a koszinusz-tétel szerint

$$f^2 + R^2 - 2Rf \cos \alpha = \frac{f^2}{n^2}.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva (és a számunkra fontos nagyobb gyököt választva) a keresett OB távolság:

$$f(\alpha) = R \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{n^2 - 1}{n^2}} \right).$$

Ez a függvény $\cos \alpha$ -nak monoton növekvő, α -nak tehát monoton csökkenő függvénye. f legkisebb értékét a legnagyobb olyan $\alpha_{\max}$ szögnél veszi fel, melyre $\sin \beta \leq 1$, vagyis $\sin \alpha_{\max} = 1/n$ -nél. Itt

$$f = f_{\min} = R \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} = 7,1 \text{ cm.}$$

f legnagyobb értékét (pontosabban felső korlátját) $\alpha \rightarrow 0$ határesetben kapjuk, ekkor

$$f \rightarrow f_{\max} = R \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) = R \frac{n}{n - 1} = 17,1 \text{ cm.}$$

Jesch Dávid (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 12. o.t.) megoldása alapján

III. megoldás. Az *ábra* síkjában az optikai tengelyhez közel haladó fénysugarak az üveg határfelületén éppen úgy törnek meg, mint ahogy egy planparalel lemezen, majd egy síkdomború vékony lencsén való áthaladásukkor tennék. A planparalel lemez nem változtatja meg a sugarak irányát, a lencse viszont fókuszálja, az optikai tengelynek a lencsétől $R/(n-1)$ távolságban levő pontjára képezi le azokat. Ha ehhez a távolsághoz hozzáadjuk a henger sugarát, megkapjuk az OB távolságot a vizsgált határesetben.

(*G. P.*)

Megjegyzés. Sok megoldó úgy vélte, hogy az OB távolságnak nincs felső határa, vagyis hogy a tengelyhez közel érkező fénysugarak tetszőlegesen távoli pontban metszhetik az optikai tengelyt. A részletes számításokból az látszik, hogy ez téves „megérzés” volt.

