

Jelöljük a lejtő hosszát ℓ -lel, hajlásszögét pedig α -val. ($\sin \alpha = h/\ell$). Az A test $g \sin \alpha$ gyorsulással mozog a lejtő mentén, és mivel

$$(1) \quad v_A = \sqrt{2gh}$$

sebességgel érkezik a lejtő aljára, mozgásának ideje

$$(2) \quad t_A = \frac{2\ell}{v_A} = \frac{2\ell}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Vizsgáljuk most az elhajított testet! Ha β -val jelöljük a kezdősebességének a vízszintessel bezárt szögét, akkor a BC szakasz hossza (a hajítás távolsága)

$$(3) \quad d = \frac{v_B^2}{g} \sin 2\beta,$$

ahol v_B a test kezdősebessége. Ez a kezdősebesség megegyezik a becsapódás sebességével, az pedig a feladat szövege szerint az (1)-ben szereplő v_A -val egyenlő. Másrészt viszont

$$d \operatorname{tg} \alpha = h,$$

amit (3)-mal és (1)-gyel összevetve a

$$(4) \quad 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 2\beta = 1$$

összefüggést kapjuk.

A B test vízszintes irányú sebessége $v_B \cos \beta$, míg az A test vízszintes irányú átlagsebessége $\frac{1}{2}v_A \cos \alpha$. Mivel mindkét test ugyanannyi idő alatt teszi meg a BC vízszintes távolságot, a két átlagsebesség meg kell egyezzen:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \cos \alpha = \cos \beta.$$

A (4) egyenlet (5) felhasználásával

$$(6) \quad 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = 1$$

alakba is írható. Fejezzük ki (6)-ból $\sin \beta$ -t, majd négyzetre emelve adjuk hozzá (5)-ből kiszámított $\cos^2 \beta$ -hoz:

$$\frac{1}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = 1,$$

ahonnan a

$$\cos^4 \alpha - 5 \cos^2 \alpha + 3 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ez $\cos^2 \alpha$ -ra nézve másodfokú egyenlet, melynek megoldása

$$\cos^2 \alpha = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad \alpha \approx 33,38^\circ.$$

(A pozitív előjel 1-nél nagyobb számot adna $\cos^2 \alpha$ -ra!)

Látható, hogy a feladatban szereplő két feltétel (a becsapódási sebességek nagyságának és a két test mozgásidejének egyenlősége) egyértelműen meghatározza a lejtő hajlásszögét, és ezzel együtt a lejtő hosszát is:

$$\ell = \frac{h}{\sin \alpha} \approx 1,82 \text{ m}.$$

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghegy F. Gimn., 10. o.t.) és
Török Edwin (Temesvár, Bartók B. Líceum, 9. o.t.) dolgozata alapján